

Venn-Diagramme

Grundlagen und Anwendungen

Andreas Otte

Dank für vielfältige Unterstützung gebührt: Detlef Mühle, Prof. Dr. Bruno Baron von Freytag Löringhoff, Dr. Johann-Michael von Petzinger, OStR Wolfgang Ruwe, OStR Gerhard Gillhoff, Curd Bergmann, Dirk Schumacher, Anette Riemer, Klaus Riemer und Dr. M.-J. Tauber.

Nicht vergessen werden dürfen auch der Rest des „Chaoten Teams“ (DCT) Thomas „Tici“ Thissen und Jens „Himpel“ Gelhar, sowie Marita „Mary“ Dücker, Claus-Dieter „Alf“ Hein, Carsten „Killer“ Fliege, Thomas „The Elk“ Schulze und Jörg-Christian „Wini“ Winrich.

Paderborn, den 26. April 1993

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 5 |
| 2 | Grundlagen | 7 |
| 2.1 | Verbandstheorie | 7 |
| 2.1.1 | Verband | 7 |
| 2.1.2 | Halbordnungsstruktur | 10 |
| 2.1.3 | Verband und Halbordnungsstruktur | 12 |
| 2.1.4 | Boolesche Verbände | 14 |
| 2.2 | Bemerkungen zum Hintergrundkalkül | 21 |
| 2.3 | Eine Erweiterung des Hintergrundkalküls | 23 |
| 2.4 | Das Venn-Diagramm | 24 |
| 3 | Operationen im Venn-Diagramm | 31 |
| 3.1 | Streichen von Zellen | 31 |
| 3.2 | „Sternen“ von Zellen | 32 |
| 3.3 | Testen von vermuteten Folgerungen | 34 |
| 4 | Beispielanwendungen | 39 |
| 4.1 | Die Mengenlehre | 39 |
| 4.1.1 | Grundlegende Definitionen | 39 |
| 4.1.2 | Mengenlehre - Boolescher Verband | 40 |
| 4.2 | Die Begriffslogik | 41 |
| 4.2.1 | Eine formale Sprache | 42 |
| 4.2.2 | Eine erste Axiomatik | 42 |
| 4.2.3 | Begriff, Inhalt, Umfang | 43 |
| 4.2.4 | Hilfssätze | 45 |
| 4.2.5 | Begriffslogik - Boolescher Verband | 52 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.2.6 | Eine erweiterte Begriffslogik | 54 |
| 4.3 | Die Aussagenlogik | 57 |
| 4.3.1 | Syntaktische Definition der Aussagenlogik | 58 |
| 4.3.2 | Semantische Definition der Aussagenlogik | 58 |
| 4.3.3 | Eine Axiomatik der Aussagenlogik | 60 |
| 4.3.4 | Aussagenlogik - Boolescher Verband | 60 |
| 4.3.5 | 2-wertige Boolesche Verbände | 63 |
| 4.3.6 | Das Urteilsprinzip | 63 |
| 4.4 | Der Klassenkalkül | 64 |
| 4.4.1 | Mengenlehre und Elementbeziehung | 65 |
| 4.5 | Zusammenfassung | 66 |
| 5 | Zur Geschichte der Venn-Diagramme | 69 |
| 5.1 | Eine kurze Geschichte der Logik | 69 |
| 5.2 | Zur Geschichte der Booleschen Verbände | 71 |
| 5.3 | Graphische Darstellungen logischer Beziehungen | 71 |
| 6 | Die Überwindung der graphischen Darstellung | 77 |
| 6.1 | Hyperdiagramme | 78 |
| 6.2 | Eine Abbildung der Diagramme in eine einfache Struktur | 78 |
| 6.3 | Komplexitätsüberlegungen | 82 |
| 6.4 | Übertragung der Operationen | 82 |
| 6.4.1 | Streichen | 83 |
| 6.4.2 | „Sternen“ | 83 |
| 6.4.3 | Testen von vermuteten Folgerungen | 84 |
| 7 | Erweiterungen | 85 |
| 7.1 | Integration von Individualbegriffen | 85 |
| 7.2 | Der Rückschluß auf verborgene Prämissen | 87 |
| 7.2.1 | Der syllogistische Rückschluß | 89 |
| 7.2.1.1 | Beispiele | 92 |
| 7.2.1.2 | Bewertung | 94 |
| 7.2.2 | Der allgemeine minimale Rückschluß | 94 |
| 7.2.2.1 | Theorie des allgemeinen minimalen Rückschlusses | 94 |
| 7.2.2.2 | Minimaler Rückschluß im Kalkül BL^+ | 96 |
| 7.2.2.3 | Bewertung | 98 |

| | | |
|-----------------------------|--|------------|
| 7.3 | Die Deduktion | 99 |
| 7.4 | Beweise | 101 |
| 7.4.1 | Halbordnungen | 101 |
| 7.4.2 | Negierte Halbordnungen | 102 |
| 7.4.3 | Bemerkungen | 103 |
| 7.4.4 | Individualbegriffe | 104 |
| 7.4.5 | Aussagenlogik | 104 |
| 7.4.6 | Grundformeln | 105 |
| 7.5 | Widersprüche | 105 |
| 7.6 | Bestimmung überflüssiger Voraussetzungen | 105 |
| Literaturverzeichnis | | 107 |

Kapitel 1

Einleitung

Dieser Text beschäftigt sich mit den sogenannten Venn-Diagrammen, die 1880 von John Venn (1834-1923) eingeführt wurden. Die Diagrammtechnik von Venn wurde ursprünglich entwickelt, um logische Zusammenhänge zu verdeutlichen. Die Diagramme repräsentieren aber ganz allgemein Boolesche Verbände oder auch Boolesche Algebren.

Ein Venn-Diagramm besteht aus einem „Rahmen“, der das „Universum“ darstellt, und darin ein beliebiges geschlossenes Gebilde (z.B. ein Kreis) für jedes auftretende Objekt. Es erübrigt sich, zu einem Objekt auch sein Negat (sein „Gegenteil“) einzuführen, denn letzteres ist nichts anderes als das „Äußere“ des jeweiligen „Kreises“. Da die „Kreise“ darüber hinaus so angeordnet werden, daß sich alle denkbaren Schnittflächen ergeben, entfällt auch das Einführen von verknüpften Objekten, die durch „und“ und „oder“ aus vorhandenen Grundobjekten gebildet werden.

Vorteilhaft ist, daß in die Venn-Diagramme die Axiomatik der Booleschen Verbände gleichsam eingearbeitet ist. Es genügt, die Prämissen (das Wissen) nach einem mechanischen Verfahren in ein Diagramm einzutragen. Dann kann man sofort mechanisch prüfen, ob mögliche Konklusionen (Vermutungen) aus den Prämissen **folgen** oder **nicht folgen**. Es brauchen keine Regeln angewendet zu werden, um Konklusionen zu testen, man kann nicht mit einem Beweisansatz in die Irre laufen, und vor allem sind die Ergebnisse definitiv. Vor allem bieten die Diagramme daher auch didaktische Vorteile.

Naturgemäß hat diese Diagrammtechnik Grenzen. Bei mehr als vier oder fünf Grundobjekten wird das Eintragen der Prämissen unhandlich und das Überprüfen der Konklusionen schwierig. Die oben erwähnten mechanischen Verfahren machen die Diagrammtechnik allerdings für den Einsatz auf Computern interessant. Sinnvoll wäre es, die Struktur der Diagramme auf den Computer zu übertragen, die Einarbeitung der Axiomatik beizubehalten, von der graphischen Darstellung aber zu abstrahieren. Dieser Schritt erlaubt unter Beibehaltung aller Vorteile den rein quantitativen Anwendungsbereich zu erweitern.

Die Übertragung auf den Rechner bietet aber auch noch weitere Vorteile. So ergibt sich die Möglichkeit,

noch weitere Operationen einzuführen, die an den Diagrammen vorgenommen werden können. Genannt seien hier:

- das Bestimmen der (Venn-)**minimal** noch fehlenden Prämissen, wenn eine Konklusion nicht folgt
- das mechanische Konstruieren von Beweisen, wie man von den Prämissen zur Konklusion kommt, wenn diese aus den Prämissen folgt
- die Angabe eines Überblickes, was alles aus den Prämissen folgt

Ein Programm, das die Technik der Venn-Diagramme umsetzt, kann nicht konkurrieren mit den schnellsten heute bekannten Algorithmen zur Behandlung der obigen Probleme, jedenfalls nicht im zweiwertigen Fall. Die Venn-Diagramme eignen sich jedoch zur Behandlung allgemeiner Boolescher Verbände, die nur in Spezialfällen zweiwertig sind. Das gilt es zu beachten, wenn man Vergleiche anstellen will.

Die Beschäftigung mit dieser vermeintlich veralteten, unzeitgemäßen Repräsentation Boolescher Verbände erweist sich auch unter dem Blickwinkel der Computerunterstützung als ein interessantes Instrument, die Vor- und Nachteile der heute üblichen linearen Darstellung Boolescher Verbände zu beleuchten.

Kapitel 2

Grundlagen

Die wichtigste Grundlage der Venn-Diagramme ist die Verbandstheorie, insbesondere die Theorie der Booleschen Verbände bzw. Booleschen Algebren. Die Verbandstheorie besteht aus der Theorie der Verbände und der Theorie der Halbordnungsstrukturen, sowie deren Kombination zu einer Gesamtheorie.

Diese allein reicht aber noch nicht aus. Eine logische Überbauung ist notwendig, da die Verbandstheorie in einigen Varianten keine Schlußregeln bereitstellt und um die Negation der Halbordnung zu ermöglichen. Eine erste Repräsentation dieser Theorie soll hier in der heute üblichen linearen Darstellung in einem Gleichungskalkül geschehen.

2.1 Verbandstheorie

Definition 2.1 (Bereich) *Ein Bereich enthält Objekte, die in irgendeiner Weise definiert sind, welche im folgenden nicht weiter wichtig ist. Diese Objekte seien mit a, b, c, \dots als Variablen bezeichnet und dürfen sowohl überstrichen als auch indiziert sein. Zusätzlich wird angenommen, daß ein Bereich mindestens ein Objekt enthält.*

Die später behandelten Varianten von Verbänden werden mindestens ein Objekt enthalten, zuvor wird es die Beweise vereinfachen. Diese Definition ist für den augenblicklichen Bedarf etwas zu weit konzipiert, im weiteren Verlauf werden diese Erweiterungen jedoch benötigt.

Zunächst aber zur Theorie der Verbände, die hier nur soweit entwickelt werden soll, wie es zur Behandlung der Venn-Diagramme nötig ist. Dazu wurden im wesentlichen [1] und [2] verwendet.

2.1.1 Verband

Definition 2.2 (Abgeschlossene Verknüpfung) *Eine beliebigstellige Verknüpfung \circ heißt abgeschlossen über dem Bereich A , wenn für alle a, b, c, \dots , auch $\circ(a, b, c, \dots)$ in A ist.*

Definition 2.3 (Algebraische Struktur) Ein Bereich A mit einer oder mehreren abgeschlossenen Verknüpfungen heißt algebraische Struktur: $(A, \circ_1, \circ_2, \dots)$. A heißt Trägerbereich dieser Struktur.

Wenn im folgenden also auf Objekte a, b, c, \dots, x, y, z bezug genommen wird, so sind immer Objekte aus dem Bereich gemeint.

Definition 2.4 (Verband) Die algebraische Struktur (L, \sqcup, \sqcap) heißt Verband, wenn folgende Bedingungen für alle Variablen a, b, c aus dem Bereich L erfüllt sind:

$$\begin{array}{ll} \text{(V1a)} & a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c & \text{(V1b)} & a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c \\ \text{(V2a)} & a \sqcup b = b \sqcup a & \text{(V2b)} & a \sqcap b = b \sqcap a \\ \text{(V3a)} & a \sqcap (a \sqcup b) = a & \text{(V3b)} & a \sqcup (a \sqcap b) = a \end{array}$$

Bemerkung 2.1 (Substitutionsregel) Ein Objekt aus dem Bereich wird auch Term genannt, ebenso alle Objekte, die sich durch Verknüpfung mittels \sqcap oder \sqcup erzeugen lassen. Terme werden mittels des Gleichheitszeichens $=$ in Beziehung zueinander gesetzt. Für dieses Zeichen gilt unter anderem die Substitutionsregel, die besagt, daß Terme, die in der Gleichheitsbeziehung zueinander stehen, wechselseitig in und füreinander eingesetzt (substituiert) werden dürfen. Die Gleichheit ist eine Äquivalenzrelation, also symmetrisch, transitiv und auch reflexiv.

Bemerkung 2.2 (Dualitätsprinzip) In den Verbandsaxiomen treten die Operationen \sqcup und \sqcap gleichberechtigt auf. Daraus läßt sich das fundamentale Dualitätsprinzip formulieren. Dazu muß zunächst geklärt werden, was ein verbandstheoretischer Ausdruck ist. Ein solcher Ausdruck ist ein sprachliches Gebilde, in dem neben einigen logischen Teilen und Variablen für die Objekte eines Verbandes nur die Symbole \sqcup und \sqcap auftreten. Einem solchen Ausdruck X ist eindeutig ein sogenannter dualer Ausdruck $D(X)$ zugeordnet, der aus X dadurch entsteht, daß in X überall \sqcup durch \sqcap ersetzt wird und umgekehrt. Natürlich ist dann $D(D(X)) = X$.

Ein in jedem Verband gültiger verbandstheoretischer Ausdruck, insbesondere also auch jedes Axiom, heiße ein Satz der Verbandstheorie.

Satz 2.1 (Dualitätsprinzip für Verbände) Der duale Ausdruck eines Satzes der Verbandstheorie ist wieder ein Satz der Verbandstheorie.

Beweis: Für jedes Axiom ist auch dessen dualer Ausdruck ein Axiom, daher kann für jeden aus den Axiomen erzeugten Ausdruck auch dessen dualer Ausdruck aus den Axiomen erzeugt werden. ■

Satz 2.2 (Idempotenz) Sei (L, \sqcup, \sqcap) ein Verband. Dann gilt für alle a :

- (a) $a \sqcap a = a$
- (b) $a \sqcup a = a$

Beweis: (a) Es ist $a \sqcap a \stackrel{(V2b)}{=} a \sqcap a$. Ersetzen des rechten a auf der rechten Seite der Gleichung nach (V3b) durch $(a \sqcup (a \sqcap b))$ ergibt $a \sqcap a = a \sqcap (a \sqcup (a \sqcap b))$. Anwendung von (V3a) ergibt $a \sqcap a = a$.
Der Beweis für (b) ergibt sich unmittelbar durch Anwendung des Dualitätsprinzips. ■

Satz 2.3 In jedem Verband (L, \sqcup, \sqcap) gilt für alle a und b :

$$a \sqcup b = b \Leftrightarrow a \sqcap b = a$$

Beweis: „ \Rightarrow “ Es ist $a \sqcap b \stackrel{(\text{Vor.})}{=} a \sqcap (a \sqcup b) \stackrel{(V3a)}{=} a$.

„ \Leftarrow “ Es ist $a \sqcup b \stackrel{(\text{Vor.})}{=} (a \sqcap b) \sqcup b \stackrel{(V2a)}{=} b \sqcup (a \sqcap b) \stackrel{(V2b)}{=} b \sqcup (b \sqcap a) \stackrel{(V3b)}{=} b$. ■

Satz 2.4 In jedem Verband (L, \sqcup, \sqcap) gilt für alle a, b, c :

$$(a) \quad a = b \Rightarrow a \sqcap c = b \sqcap c$$

$$(b) \quad a = b \Rightarrow a \sqcup c = b \sqcup c$$

Beweis: (a) Es ist $a \sqcap c \stackrel{(\text{Bem. 2.1})}{=} a \sqcap c$. Mit $a = b$ gilt dann: $a \sqcap c = b \sqcap c$.

(b) Der Beweis verläuft analog. ■

Definition 2.5 (Null/Eins-Objekt) Es gelte:

Ein Objekt y des Verbandes (L, \sqcup, \sqcap) mit $y \sqcup x = x$ und $y \sqcap x = y$ für alle x heißt Nullobjekt.

Ein Objekt y des Verbandes (L, \sqcup, \sqcap) mit $y \sqcap x = x$ und $y \sqcup x = y$ für alle x heißt Einsobjekt.

Satz 2.5 In jedem Verband gibt es höchstens ein Nullobjekt und höchstens ein Einsobjekt.

Beweis: Sind x und y zwei Nullobjekte, so gilt $x \sqcap y = x$ (da x Nullobjekt) und $y \sqcap x = y$ (da y Nullobjekt), also ist $x \stackrel{(\text{Def 2.5})}{=} x \sqcap y \stackrel{(V2b)}{=} y \sqcap x \stackrel{(\text{Def 2.5})}{=} y$. Der Beweis für das Einsobjekt verläuft analog mit den dualen Ausdrücken. ■

Bemerkung 2.3 Da es nur höchstens ein Null- und höchstens ein Einsobjekt in einem Verband geben kann, seien diese (falls vorhanden) mit 0 bzw. 1 bezeichnet. Die Bedingungen für Nullobjekt und Einsobjekt sind dual zueinander definiert. Daher ist (falls beide vorhanden) die 0 das Dual der 1 und umgekehrt. Für einen solchen Verband wird die Dualisierungsregel dementsprechend erweitert.

2.1.2 Halbordnungsstruktur

In der Verbandstheorie spielen neben den Verbänden die Halbordnungsstrukturen eine große Rolle.

Definition 2.6 (Halbordnungsstruktur) Gegeben sei ein Bereich H und eine Beziehung R mit $x \sqsubseteq y$ genau dann, wenn die Beziehung R zwischen x und y besteht. („ x kleiner-gleich y “).

R heißt Halbordnung auf H genau dann, wenn gilt:

- (H1) $\forall x : x \sqsubseteq x$
- (H2) $\forall x, y : x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y$
- (H3) $\forall x, y, z : x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq z$

(H, \sqsubseteq) heißt Halbordnungsstruktur mit H als Trägerbereich. Es handelt sich lediglich um eine Halbordnung, da $\forall x, y : x \sqsubseteq y \vee y \sqsubseteq x$ nicht garantiert ist.

Bemerkung 2.4 In Halbordnungsstrukturen gilt wie in den Verbänden ein Dualitätsprinzip. Aus einem gültigen ordnungstheoretischen Ausdruck X erhält man den dualen Ausdruck $D(X)$, indem man überall $a \sqsubseteq b$ durch $b \sqsubseteq a$ ersetzt, wobei a und b beliebige Terme sind.

Satz 2.6 (Dualitätsprinzip für Halbordnungsstrukturen) Der duale Ausdruck eines Satzes der Theorie der Halbordnungsstrukturen ist ebenfalls ein Satz dieser Theorie.

Beweis: Jedes Axiom ist selbstdual (bis auf Umbenennung der Variablen), daher kann man zu jedem aus den Axiomen hergeleiteten Satz der Theorie der Halbordnungsstrukturen der duale Ausdruck ebenfalls abgeleitet werden. ■

Definition 2.7 (Minimale/Maximale Objekte) Sei (H, \sqsubseteq) eine Halbordnungsstruktur.

Ein Objekt u heißt genau dann minimal, wenn es kleiner-gleich allen mit ihm vergleichbaren ist, also wenn für alle x aus H aus der Gleichung $x \sqsubseteq u$ die Gleichung $x = u$ folgt.

Ein Objekt v heißt genau dann maximal, wenn jedes mit ihm vergleichbare Objekt kleiner-gleich v ist, also wenn für alle x aus H aus der Gleichung $v \sqsubseteq x$ die Gleichung $x = v$ folgt.

Definition 2.8 (Kleinstes/größtes Objekt) Sei (H, \sqsubseteq) eine Halbordnungsstruktur.

Ein Objekt y heißt genau dann kleinstes Objekt von (H, \sqsubseteq) , wenn für alle x gilt: $y \sqsubseteq x$.

Ein Objekt y heißt genau dann größtes Objekt von (H, \sqsubseteq) , wenn für alle x gilt: $x \sqsubseteq y$.

Satz 2.7 Es gibt in einer Halbordnungsstruktur höchstens ein kleinstes Objekt und höchstens ein größtes Objekt.

Beweis: Seien y und z kleinste Objekte. Dann gilt $y \sqsubseteq x$ für alle x , insbesondere gilt also auch $y \sqsubseteq z$. Mit der gleichen Argumentation gilt $z \sqsubseteq y$, nach (H2) also $y = z$. Der Beweis für größte Objekte verläuft analog mit den dualen Ausdrücken. ■

Bemerkung 2.5 Ein kleinstes Objekt wird (falls vorhanden) mit 0_{\sqsubseteq} bezeichnet. Ein größtes Objekt, wird (falls vorhanden) mit 1_{\sqsubseteq} bezeichnet. Größtes und kleinstes Objekt sind dual zueinander definiert, daher ist (falls beide vorhanden sind) 0_{\sqsubseteq} das Dual von 1_{\sqsubseteq} und umgekehrt. Die Dualisierungsregel für Ordnungsstrukturen ist dementsprechend zu erweitern, falls die betrachtete Struktur größte und kleinste Objekte enthält.

Definition 2.9 (obere/untere Schranke) Sei (H, \sqsubseteq) eine Halbordnungsstruktur, $T \subseteq H$.

Ein x heißt obere Schranke von T genau dann, wenn für jedes Objekt y aus T gilt: $y \sqsubseteq x$.

Ein x heißt untere Schranke von T genau dann, wenn für jedes Objekt y aus T gilt: $x \sqsubseteq y$.

Definition 2.10 (Supremum/Infimum) Sei (H, \sqsubseteq) eine Halbordnungsstruktur, $T \subseteq H$.

Ein x heißt Supremum von T genau dann, wenn x die kleinste obere Schranke von T ist, d.h. wenn für alle oberen Schranken y von T gilt: $x \sqsubseteq y$. Abgekürzt schreibt man $\sup(T)$.

Ein x heißt Infimum von T genau dann, wenn x die größte untere Schranke von T ist, d.h. wenn für alle unteren Schranken y von T gilt: $y \sqsubseteq x$. Abgekürzt schreibt man $\inf(T)$.

Satz 2.8 Sei $T \subseteq H$. Dann gibt es höchstens ein Supremum (Infimum) von T .

Beweis: Seien e und e' zwei Suprema (Infima) von T . Dann sind beide insbesondere auch obere (untere) Schranken von T (Def 2.10). Dann gilt $e \sqsubseteq e'$ und $e' \sqsubseteq e$, d.h. nach (H2): $e = e'$. ■

Bemerkung 2.6 Wir wollen uns im folgenden auf Halbordnungsstrukturen beschränken, in denen Suprema und Infima von Objekten eines Bereiches immer existieren und mit zu dem Bereich gehören. $\sup(T)$ und $\inf(T)$ sind zueinander dual definiert. Die Dualisierungsregel für Halbordnungsstrukturen ist dementsprechend zu erweitern.

Satz 2.9 Es gilt:

(a) $\inf(a, a) = a$

(b) $\sup(a, a) = a$

Beweis: (a) Nach Definition 2.9 ist $\inf(a, a) \sqsubseteq a$. Andererseits gilt aber $a \sqsubseteq a$, d.h. a ist untere Schranke von a .

Da $\inf(a, a)$ nach Definition 2.10 die größte untere Schranke von a und a ist, gilt $a \sqsubseteq \inf(a, a)$. Nach (H2) gilt damit $\inf(a, a) = a$.

(b) Der Beweis ist dual zu dem von (a).

Die Beweise lassen sich einfach auf mehr als zwei Komponenten erweitern. ■

Satz 2.10 *Es gilt:*

(a) $x \sqsubseteq \inf(T) \Leftrightarrow x \sqsubseteq y$ für alle y aus T .

(b) $\sup(T) \sqsubseteq x \Leftrightarrow y \sqsubseteq x$ für alle y aus T .

Beweis: (a) „ \Rightarrow “ Nach Definition 2.9 ist das Infimum eine untere Schranke, daß heißt es gilt $\inf(T) \sqsubseteq y$ für alle y aus T . Nach Voraussetzung gilt $x \sqsubseteq \inf(T)$, daher gilt nach Axiom (H3): $x \sqsubseteq y$ für alle y aus T .

„ \Leftarrow “ Umgekehrt folgt aus $x \sqsubseteq y$ für alle y aus T , daß x untere Schranke von T ist, nach Definition 2.10 gilt dann aber $x \sqsubseteq \inf(T)$.

(b) Der Beweis ist dual zu (a). ■

Satz 2.11 *Es gilt:*

(a) $a \sqsubseteq b \Rightarrow \inf(a, b) = a$

(b) $a \sqsubseteq b \Rightarrow \sup(a, b) = b$

Beweis: (a) Nach Voraussetzung ist $a \sqsubseteq b$. Außerdem gilt $a \sqsubseteq a$ (H1), daher gilt nach Satz 2.10 $a \sqsubseteq \inf(a, b)$. Nach Definition 2.9 gilt auch $\inf(a, b) \sqsubseteq a$, daher gilt nach (H2) $\inf(a, b) = a$.

(b) Der Beweis ist dual zu (a). ■

Satz 2.12 *Es gilt: $a \sqsubseteq b, \inf(a, b) \sqsubseteq 0 \Rightarrow a \sqsubseteq 0$.*

Beweis: Nach Satz 2.11 folgt aus $a \sqsubseteq b$: $\inf(a, b) = a$, damit auch (Beweis von Satz 2.11) $a \sqsubseteq \inf(a, b)$. Da $\inf(a, b) \sqsubseteq 0$ folgt daher nach (H3) $a \sqsubseteq 0$. ■

2.1.3 Verband und Halbordnungsstruktur

Nun werden Verband- und Halbordnungsstruktur zueinander in Beziehung gesetzt.

Satz 2.13 *Sei (L, \sqcup, \sqcap) ein Verband. Dann wird durch $a \sqsubseteq b : \Leftrightarrow a \sqcap b = a$ auf L eine Halbordnungsstruktur (L, \sqsubseteq) definiert.*

Beweis: (1) Aus Satz 2.2 ($a \sqcap a = a$) folgt nach der Definition aus Satz 2.13: $a \sqsubseteq a$.

(2) Aus $x \sqsubseteq y$ und $y \sqsubseteq x$ folgt zunächst nach obiger Definition $x \sqcap y = x$ und $y \sqcap x = y$, daher gilt:
 $x \stackrel{(\text{Vor.})}{=} x \sqcap y \stackrel{(\text{V2b})}{=} y \sqcap x \stackrel{(\text{Vor.})}{=} y$.

(3) Aus $x \sqsubseteq y$ und $y \sqsubseteq z$ folgt zunächst nach Definition $x \sqcap y = x$ und $y \sqcap z = y$. Dann ist durch Einsetzen
 $x \sqcap z \stackrel{(\text{Vor.})}{=} (x \sqcap y) \sqcap z \stackrel{(\text{V1b})}{=} x \sqcap (y \sqcap z) \stackrel{(\text{Vor.})}{=} x \sqcap y \stackrel{(\text{Vor.})}{=} x$, also $x \sqsubseteq z$. ■

Satz 2.14 Seien (L, \sqcup, \sqcap) ein Verband und (L, \sqsubseteq) eine wie vor definierte Halbordnungsstruktur. Dann gilt für alle a und b :

(a) $a \sqcup b = \sup(a, b)$

(b) $a \sqcap b = \inf(a, b)$

Falls Verband wie Halbordnungsstruktur über $0/1$ bzw. $0_{\sqsubseteq}/1_{\sqsubseteq}$ verfügen, gilt:

(c) $0 = 0_{\sqsubseteq}$

(d) $1 = 1_{\sqsubseteq}$

Beweis: (a) Nach (V3a) gilt $a \sqcap (a \sqcup b) = a$ und $b \sqcap (a \sqcup b) = b$, was nach obiger Definition mit $a \sqsubseteq a \sqcup b$ sowie $b \sqsubseteq a \sqcup b$ gleichbedeutend ist; somit ist $a \sqcup b$ obere Schranke von a und b .

$a \sqcup b$ ist aber auch die kleinste obere Schranke. Ist nämlich $a \sqsubseteq c$ und $b \sqsubseteq c$, so ist $a \sqcap c = a$ und $b \sqcap c = b$, sowie nach Satz 2.3 $a \sqcup c = c$ und $b \sqcup c = c$. Daher ist $c \sqcup (a \sqcup b) \stackrel{(\text{V1a})}{=} (a \sqcup c) \sqcup b \stackrel{(\text{Vor.})}{=} c \sqcup b \stackrel{(\text{Vor.})}{=} c$ und daher (Satz 2.3) ist wiederum nach obiger Definition $c \sqcap (a \sqcup b) = a \sqcup b$, was gleichwertig mit $a \sqcup b \sqsubseteq c$ ist.

(b) Der Beweis ist dual zu (a).

(c) Nach Definition 2.5 gilt im Verband für das Nullobjekt 0 für alle x : $0 \sqcap x = 0$. Nach Satz 2.13 gilt daher $0 \sqsubseteq x$ für alle x , daher ist die 0 ein kleinstes Objekt im Sinne von Definition 2.8. Daher gilt: $0 = 0_{\sqsubseteq}$

(d) Der Beweis ist dual zu (c). ■

Sei nun umgekehrt eine Halbordnungsstruktur (L, \sqsubseteq) vorgegeben. Es sollen nun zwei abgeschlossene Verknüpfungen \sqcup und \sqcap definiert werden, so daß (L, \sqcup, \sqcap) einen Verband darstellt.

Satz 2.15 Sei (L, \sqsubseteq) eine Halbordnungsstruktur. Mit $a \sqcup b := \sup(a, b)$ und $a \sqcap b := \inf(a, b)$ ist (L, \sqcup, \sqcap) eine Verbandsstruktur, und es gilt $a \sqsubseteq b \Rightarrow a \sqcap b = a$.

Beweis: (1) Nach Definition 2.10 sind Suprema bzw. Infima bereits kommutativ definiert, nach Übersetzung sind daher (V2a) und (V2b) bewiesen.

(2) Es ist nach Definition 2.10 $\inf(a, \inf(x, y)) \sqsubseteq a$ und $\inf(a, \inf(x, y)) \sqsubseteq \inf(x, y)$. Weiterhin ist nach Definition 2.10 $\inf(x, y) \sqsubseteq x$ und $\inf(x, y) \sqsubseteq y$. Daher gilt nach (H3) $\inf(a, \inf(x, y)) \sqsubseteq x$ und $\inf(a, \inf(x, y)) \sqsubseteq y$. Daraus folgt nach Definition 2.10, daß $\inf(a, \inf(x, y)) \sqsubseteq \inf(a, x)$ und $\inf(a, \inf(x, y)) \sqsubseteq \inf(a, y)$.

$\inf(a, y)$ gilt. Das ergibt wiederum nach Definition 2.10, daß $\inf(a, \inf(x, y)) \sqsubseteq \inf(\inf(a, x), \inf(a, y))$ gilt.

Umgekehrt gilt nach Def. 2.10 $\inf(\inf(a, x), \inf(a, y)) \sqsubseteq \inf(a, x)$ und $\inf(\inf(a, x), \inf(a, y)) \sqsubseteq \inf(a, y)$. Ebenso ist nach Def. 2.10 $\inf(a, x) \sqsubseteq a$; $\inf(a, x) \sqsubseteq x$; $\inf(a, y) \sqsubseteq a$ und $\inf(a, y) \sqsubseteq y$.

Daher gilt $\inf(\inf(a, x), \inf(a, y)) \sqsubseteq a$; $\inf(\inf(a, x), \inf(a, y)) \sqsubseteq x$; $\inf(\inf(a, x), \inf(a, y)) \sqsubseteq y$ nach (H3). Daher ist nach Definition 2.10 $\inf(\inf(a, x), \inf(a, y)) \sqsubseteq \inf(x, y)$ und damit ist nach Definition 2.10 auch $\inf(\inf(a, x), \inf(a, y)) \sqsubseteq \inf(a, \inf(x, y))$.

Daher ist $\inf(\inf(a, x), \inf(a, y)) = \inf(a, \inf(x, y))$ nach (H2).

Das kann man ebenso für $\inf(\inf(a, x), y)$ durchführen, woraus sich ergibt: $\inf(a, \inf(x, y)) = \inf(\inf(a, x), y)$.

Das bedeutet, daß nach Übersetzung $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ gilt, womit (V1b) bewiesen ist. Der Beweis von (V1a) verläuft dual.

(3) Es gilt nach Definition 2.10 $a \sqsubseteq \sup(a, b)$, daher gilt nach Satz 2.11 $\inf(a, \sup(a, b)) = a$. Ebenso gilt nach Definition 2.10 $\inf(a, b) \sqsubseteq a$, daher gilt nach Satz 2.11 $\sup(\inf(a, b), a) = a$. Damit sind nach Übersetzung (V3a) und (V3b) bewiesen.

(4) Es sei $a \sqsubseteq b$. Nach Satz 2.11 gilt $\inf(a, b) = a$. Nach Übersetzung gemäß Satz 2.14 gilt dann $a \sqcap b = a$. Für Null- und Einsobjekt gilt die Argumentation wie im Beweis von Satz 2.14.

■

Damit ist eine eindeutige Beziehung zwischen den Verbänden und den hier betrachteten Halbordnungsstrukturen hergestellt. Es ist üblich, Verbände mit den Halbordnungsstrukturen zu identifizieren, bei denen zu zwei Objekten aus dem Trägerbereich der Halbordnungsstruktur auch deren Supremum und Infimum zu dem Trägerbereich gehört. Alle Sätze, die für \sqcap und \sqcup bewiesen wurden, gelten daher auch für \inf und \sup und umgekehrt. Die Dualisierungsprinzipien beider Strukturen können ebenfalls ineinander überführt bzw. ergänzt werden.

Satz 2.16 *Es gilt für alle x, y : $x = y \Leftrightarrow x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x$*

Beweis: $x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y$ ist Axiom (H2). Es ist $x \stackrel{(\text{Satz 2.2})}{=} x \sqcap x \stackrel{(\text{Vor.})}{=} x \sqcap y$. Dann gilt nach Satz 2.13 $x \sqsubseteq y$. Umgekehrt ist $y \stackrel{(\text{Satz 2.2})}{=} y \sqcap y \stackrel{(\text{Vor.})}{=} y \sqcap x$. Dann gilt nach Satz 2.13 $y \sqsubseteq x$.

■

2.1.4 Boolesche Verbände

Die Booleschen Verbände sind das eigentliche Ziel dieses Kapitels, zunächst erfolgen aber noch einige weitere einleitende Definitionen, Sätze und Beweise.

Definition 2.11 (Distributiver Verband) *Ein Verband (L, \sqcup, \sqcap) heißt genau dann distributiv, wenn für alle x, y, z gilt:*

$$(V4a) \quad x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \quad (V4b) \quad x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$$

Man gibt zwei Distributivgesetze an, um die Gleichwertigkeit von \sqcap und \sqcup und damit die Dualität zu erhalten.

Satz 2.17 (Kürzungsregel) *Ist (L, \sqcup, \sqcap) ein distributiver Verband, dann gilt für alle x, y, z :*

$$x \sqcup y = x \sqcup z, \quad x \sqcap y = x \sqcap z \quad \Rightarrow \quad y = z.$$

Beweis: Es ist: $y \stackrel{(V3b)}{=} y \sqcup (x \sqcap y) \stackrel{(Vor.)}{=} y \sqcup (x \sqcap z) \stackrel{(V4b)}{=} (y \sqcup x) \sqcap (y \sqcup z) \stackrel{(V2a)}{=} (x \sqcup y) \sqcap (y \sqcup z) \stackrel{(Vor.)}{=} (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z) \stackrel{(V4b)}{=} z \sqcup (x \sqcap y) \stackrel{(Vor.)}{=} z \sqcup (x \sqcap z) \stackrel{(V3b)}{=} z.$

■

Definition 2.12 (Komplementärer Verband) *Ein Verband (L, \sqcup, \sqcap) mit Nullobjekt 0 und Einsobjekt 1 heißt genau dann komplementär, wenn es zu jedem a mindestens ein x mit $a \sqcup x = 1$ und $a \sqcap x = 0$ gibt. x heißt ein Komplement von a .*

Satz 2.18 *In einem distributiven Verband gibt es zu jedem Objekt höchstens ein Komplement.*

Beweis: Sind x und y Komplemente von a , so gilt gemäß Definition 2.12: $a \sqcup x = 1 = a \sqcup y$, sowie $a \sqcap x = 0 = a \sqcap y$.

Dann ist $x \stackrel{(V3b)}{=} x \sqcup (a \sqcap x) \stackrel{(Vor.)}{=} x \sqcup (a \sqcap y) \stackrel{(V4b)}{=} (x \sqcup a) \sqcap (x \sqcup y) \stackrel{(Vor.+V2a)}{=} (a \sqcup y) \sqcap (x \sqcup y) \stackrel{(V4b)}{=} (a \sqcap x) \sqcup y \stackrel{(Vor.)}{=} (a \sqcap y) \sqcup y \stackrel{(V3b)}{=} y.$

■

Satz 2.19 (Doppelte Negation) *In einem distributiven Verband ist das Komplement des Komplementes eines Objektes wieder das Objekt.*

Beweis: Sei x das Komplement von y . Dann gilt nach Definition 2.12: $y \sqcap x = 0$ und $y \sqcup x = 1$. Sei ebenso z das Komplement von x . Dann gilt gemäß Definition 2.12: $x \sqcap z = 0$ und $x \sqcup z = 1$. Insbesondere gilt also auch $x \sqcap y \stackrel{(V2b)}{=} y \sqcap x \stackrel{(s.o.)}{=} 0 \stackrel{(s.o.)}{=} x \sqcap z$ und $x \sqcup y \stackrel{(V2a)}{=} y \sqcup x \stackrel{(s.o.)}{=} 1 \stackrel{(s.o.)}{=} x \sqcup z$. Da der Verband distributiv ist, darf Satz 2.17 angewendet werden, so daß sich $y = z$ ergibt.

■

Definition 2.13 (Boolescher Verband) *Ein Verband mit 0 und 1 , der sowohl komplementär als auch distributiv ist, heißt Boolescher Verband oder auch Boolesche Algebra.*

Bemerkung 2.7 (Boolescher Verband) *Für einen Booleschen Verband gelten also insgesamt die folgenden Axiome:*

Abgeschlossenheit bezüglich der Operationen \sqcap und \sqcup .

$$\begin{array}{ll}
(\text{V1a}) & a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c & (\text{V1b}) & a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c \\
(\text{V2a}) & a \sqcup b = b \sqcup a & (\text{V2b}) & a \sqcap b = b \sqcap a \\
(\text{V3a}) & a \sqcap (a \sqcup b) = a & (\text{V3b}) & a \sqcup (a \sqcap b) = a \\
(\text{V4a}) & x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) & (\text{V4b}) & x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)
\end{array}$$

Es gibt ein kleinstes Objekt 0 und es gilt für alle a : $a \sqcup 0 = a$ und $a \sqcap 0 = 0$.

Es gibt ein größtes Objekt 1 und es gilt für alle a : $a \sqcap 1 = a$ und $a \sqcup 1 = 1$.

Für jedes Objekt a gibt es ein eindeutiges Komplement, das mit \bar{a} bezeichnet wird.

Es gilt $a \sqcup \bar{a} = 1$ und $a \sqcap \bar{a} = 0$.

Bemerkung 2.8 Die Axiome des Booleschen Verbandes sind nicht unabhängig, (V1a), (V1b), (V3a) und (V3b) sind z.B. aus den anderen Axiomen herleitbar, die eindeutige Negation ergibt sich aus (V4a) und (V4b).

Zur besseren Unterscheidung wird der Boolesche Gleichungskalkül mit dem Kürzel $BV^=$ bezeichnet.

Mit dem Wort Variable wird ein beliebiges unbestimmtes Objekt aus dem Trägerbereich bezeichnet. Eindeutig bestimmte Objekte, wie z.B. 0 und 1 werden als Konstanten bezeichnet.

Ausdrücke wie z.B. $a = b$ in Booleschen Verbänden oder $a \sqsubseteq b$ in Halbordnungsstrukturen werden auch Formeln genannt.

Bisher wurde nur bewiesen, daß die Axiomensysteme V1-V3 (der Gleichungskalkül) und H1-H3 (der Halbordnungskalkül) äquivalent sind. Was ist mit $BV^=$? Zumindest weiß man, daß man (nach Satz 2.15) in Halbordnungsstrukturen \sqcap und \sqcup statt *inf* bzw. *sup* verwenden kann.

Satz 2.20 In (L, \sqsubseteq) gilt:

- (a) $x \sqcup (y \sqcap z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$
- (b) $(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \sqsubseteq x \sqcap (y \sqcup z)$

Beweis: (a) Es ist $x \sqsubseteq x \sqcup y$ und $x \sqsubseteq x \sqcup z$. Daher ist nach Definition 2.10 $x \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$. Es ist $y \sqcap z \sqsubseteq y$ und $y \sqsubseteq x \sqcup y$. Daher gilt (H3) $y \sqcap z \sqsubseteq x \sqcup y$. Außerdem ist $y \sqcap z \sqsubseteq z$ und $z \sqsubseteq x \sqcup z$, daher nach (H3) $y \sqcap z \sqsubseteq x \sqcup z$. Daher gilt nach Definition 2.10 $x \sqcup (y \sqcap z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$.

(b) Der Beweis ist dual zu (a). ■

Es fehlen die anderen Richtungen der Distributivgesetze. Diese fügen wir als Axiome H4 hinzu:

$$\begin{array}{l}
(\text{H4}) \quad \forall_{x,y,z} : (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z) \sqsubseteq x \sqcup (y \sqcap z) \\
\quad \quad \forall_{x,y,z} : x \sqcap (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)
\end{array}$$

(H5) sei die Definition der größten/kleinsten Objekte gemäß Definition 2.8. (H6) sei die Definition des Komplements gemäß Definition 2.12 lediglich nun mit Hilfe von Satz 2.14 auf die Halbordnungsstruktur bezogen.

Aus Satz 2.20 und (H4) folgt mittels (H2) sofort (V4). Umgekehrt folgt aus (V4) mittels Satz 2.16 sofort (H4). Dieser Boolesche Halbordnungskalkül (H1 - H6) wird mit BV^{\square} bezeichnet.

Satz 2.21 Sei (L, \sqcup, \sqcap) ein Boolescher Verband. Dann gilt: $\bar{1} = 0$ und $\bar{0} = 1$.

Beweis: Für das Komplement $\bar{1}$ von 1 muß gelten: $1 \sqcap \bar{1} = 0$ und $1 \sqcup \bar{1} = 1$. $\bar{1} = 0$ erfüllt diese Bedingungen, denn es ist $1 \sqcap 0 = 0$ und $1 \sqcup 0 = 1$. Für das Komplement $\bar{0}$ von 0 muß gelten: $0 \sqcap \bar{0} = 0$ und $0 \sqcup \bar{0} = 1$. $\bar{0} = 1$ erfüllt diese Bedingungen, denn es ist $0 \sqcap 1 = 0$ und $0 \sqcup 1 = 1$. ■

Satz 2.22 Es gilt:

$$(a) \ x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcap \bar{y} = 0$$

$$(b) \ x \sqsubseteq y \Leftrightarrow 1 = \bar{x} \sqcup y$$

Beweis: (a) „ \Rightarrow “ Es gilt $x \sqsubseteq y$. Dann gilt nach Satz 2.13 $x = x \sqcap y$. Dann ist $x \sqcap \bar{y} \stackrel{(Vor.)}{=} (x \sqcap y) \sqcap \bar{y} \stackrel{(V1b)}{=} x \sqcap (y \sqcap \bar{y}) \stackrel{(Bem. 2.7)}{=} x \sqcap 0 \stackrel{(Def. 2.5)}{=} 0$.

„ \Leftarrow “ Es ist $x \sqcap \bar{y} = 0$. Dann gilt: $y \stackrel{(Def. 2.5)}{=} 0 \sqcup y \stackrel{(Vor.)}{=} (x \sqcap \bar{y}) \sqcup y \stackrel{(V4b)}{=} (x \sqcap y) \sqcup (\bar{y} \sqcap y) \stackrel{(Bem. 2.7)}{=} (x \sqcup y) \sqcap 1 \stackrel{(Def. 2.5)}{=} x \sqcup y$. Dann gilt nach Satz 2.3 $x = x \sqcap y$ und daraus folgt nach Satz 2.13 $x \sqsubseteq y$.

(b) „ \Rightarrow “ Es gilt $x \sqsubseteq y$. Dann gilt nach Satz 2.13 $x = x \sqcap y$ und nach Satz 2.3 gilt dann $y = x \sqcup y$. Dann ist $\bar{x} \sqcup y \stackrel{(Vor.)}{=} \bar{x} \sqcup (x \sqcup y) \stackrel{(V1a)}{=} (\bar{x} \sqcup x) \sqcup y \stackrel{(Bem. 2.7)}{=} 1 \sqcup y \stackrel{(Def. 2.5)}{=} 1$.

„ \Leftarrow “ Es ist $1 = \bar{x} \sqcup y$. Dann gilt: $x \stackrel{(Def. 2.5)}{=} 1 \sqcap x \stackrel{(Vor.)}{=} (\bar{x} \sqcup y) \sqcap x \stackrel{(V4a)}{=} (\bar{x} \sqcap x) \sqcup (x \sqcap y) \stackrel{(Bem. 2.7)}{=} 0 \sqcup (x \sqcap y) \stackrel{(Def. 2.5)}{=} x \sqcap y$. Nach Satz 2.13 gilt dann: $x \sqsubseteq y$. ■

Satz 2.23 (De Morgan) Sei (L, \sqcup, \sqcap) ein Boolescher Verband. Dann gilt für alle x, y :

$$(a) \ \overline{(x \sqcap y)} = \bar{x} \sqcup \bar{y}$$

$$(b) \ \overline{(x \sqcup y)} = \bar{x} \sqcap \bar{y}$$

Beweis: (a) Es ist $(x \sqcap y) \sqcap (\bar{x} \sqcup \bar{y}) \stackrel{(V4a)}{=} ((x \sqcap y) \sqcap \bar{x}) \sqcup ((x \sqcap y) \sqcap \bar{y}) \stackrel{(V2b)}{=} ((y \sqcap x) \sqcap \bar{x}) \sqcup ((x \sqcap y) \sqcap \bar{y}) \stackrel{(V1b)}{=} (y \sqcap (x \sqcap \bar{x})) \sqcup (x \sqcap (y \sqcap \bar{y})) \stackrel{(Bem. 2.7)}{=} (y \sqcap 0) \sqcup (x \sqcap 0) \stackrel{(Def. 2.5)}{=} 0 \sqcup 0 \stackrel{(Satz 2.2)}{=} 0$. Daraus folgt nach Satz 2.22: $\bar{x} \sqcup \bar{y} \sqsubseteq \overline{(x \sqcap y)}$.

Umgekehrt ist $(x \sqcap y) \sqcup (\bar{x} \sqcup \bar{y}) \stackrel{(V4b)}{=} (x \sqcup (\bar{x} \sqcup \bar{y})) \sqcap (y \sqcup (\bar{x} \sqcup \bar{y})) \stackrel{(V2a)}{=} (x \sqcup (\bar{x} \sqcup \bar{y})) \sqcap (y \sqcup (\bar{y} \sqcup \bar{x})) \stackrel{(V1a)}{=} ((x \sqcup \bar{x}) \sqcup \bar{y}) \sqcap ((y \sqcup \bar{y}) \sqcup \bar{x}) \stackrel{(Bem. 2.7)}{=} (1 \sqcup y) \sqcap (1 \sqcup x) \stackrel{(Def. 2.5)}{=} 1 \sqcap 1 \stackrel{(Satz 2.2)}{=} 1$. Daraus folgt nach Satz 2.22: $\overline{(x \sqcap y)} \sqsubseteq \bar{x} \sqcup \bar{y}$. Nach (H2) folgt daher: $\overline{(x \sqcap y)} = \bar{x} \sqcup \bar{y}$.

(b) Der Beweis verläuft dual. ■

Satz 2.24 Sei (L, \sqcup, \sqcap) ein Boolescher Verband. Dann gilt für alle x, y : $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \bar{y} \sqsubseteq \bar{x}$

Beweis: „ \Rightarrow “ Es ist $x \sqsubseteq y$. Dann gilt nach Satz 2.22: $x \sqcap \bar{y} = 0$. (V2b) liefert $\bar{y} \sqcap x = 0$. Daraus folgt wieder mit Satz 2.22: $\bar{y} \sqsubseteq \bar{x}$.

„ \Leftarrow “ Es ist $\bar{y} \sqsubseteq \bar{x}$. Dann gilt nach Satz 2.22: $\bar{y} \sqcap \bar{x} = 0$. Dann ist nach (V2b): $\bar{x} \sqcap \bar{y} = 0$. Gemäß Satz 2.19 gilt dann: $x \sqcap \bar{y} = 0$. Dann gilt nach Satz 2.22: $x \sqsubseteq y$. ■

Satz 2.25 Sei (L, \sqcup, \sqcap) ein Boolescher Verband. Dann gilt für alle a, b :

$$(a) a = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap \bar{b})$$

$$(b) a = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup \bar{b})$$

Beweis: (a) Es ist: $(a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap \bar{b}) \stackrel{(V4a)}{=} a \sqcap (b \sqcup \bar{b}) \stackrel{(\text{Bem. } 2.7)}{=} a \sqcap 1 \stackrel{(\text{Def. } 2.5)}{=} a$.

(b) Der Beweis ist dual. ■

Satz 2.26 (Transportationsregel von Peirce) Sei (L, \sqcup, \sqcap) ein Boolescher Verband. Dann gilt für alle a, b, c :

$$(a) a \sqsubseteq b \sqcup c \Leftrightarrow a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq c$$

$$(b) a \sqcap b \sqsubseteq c \Leftrightarrow a \sqsubseteq \bar{b} \sqcup c$$

Beweis: (a) „ \Leftarrow “ Es gilt nach Voraussetzung $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq c$. Nach Definition 2.10 gilt $c \sqsubseteq b \sqcup c$. Mit (H3) folgt daher $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq b \sqcup c$. Andererseits gilt nach Definition 2.10 $a \sqcap b \sqsubseteq b$ und auch $b \sqsubseteq b \sqcup c$. Daraus folgt nach (H3) $a \sqcap b \sqsubseteq b \sqcup c$. Nach Definition 2.10 folgt aus $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq b \sqcup c$ und $a \sqcap b \sqsubseteq b \sqcup c$, daß $(a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap \bar{b}) \sqsubseteq b \sqcup c$. Dann gilt nach Satz 2.25: $a \sqsubseteq b \sqcup c$.

„ \Rightarrow “ Es gilt nach Voraussetzung $a \sqsubseteq b \sqcup c$. Nach Definition 2.10 gilt $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq a$. Mit (H3) folgt daher $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq b \sqcup c$. Andererseits gilt nach Definition 2.10 $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq \bar{b}$ und auch $\bar{b} \sqsubseteq \bar{b} \sqcup c$. Daraus folgt nach (H3) $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq \bar{b} \sqcup c$. Nach Definition 2.10 folgt aus $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq b \sqcup c$ und $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq \bar{b} \sqcup c$, daß $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq (b \sqcup c) \sqcap (\bar{b} \sqcup c)$ gilt. Dann gilt nach Satz 2.25: $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq c$.

(b) „ \Leftarrow “ Den Beweis erhält man, indem man im Beweis (a) „ \Rightarrow “ jedes Auftreten von b durch \bar{b} ersetzt und umgekehrt.

„ \Rightarrow “ Den Beweis erhält man, indem man im Beweis (a) „ \Leftarrow “ jedes Auftreten von b durch \bar{b} ersetzt und umgekehrt. ■

Definition 2.14 (Literal) Ein Literal ist die Variable für ein Objekt oder dessen Komplement aus dem Trägerbereich eines Booleschen Verbandes.

Definition 2.15 (Boolesche Funktion) Eine Boolesche Funktion ist ein beliebiger Ausdruck, der aus endlich vielen Symbolen besteht, der die Verknüpfung von Konstanten und Variablen durch die Operationen \sqcup , \sqcap und $\bar{}$ beschreibt. Dabei werden ggf. Klammern zur Erzielung der Eindeutigkeit der Ausdrücke eingesetzt.

Bemerkung 2.9 Alle weiteren Ergebnisse dieses Abschnittes beziehen sich auf Boolesche Verbände mit endlichem Trägerbereich, also auf endliche Boolesche Verbände.

Definition 2.16 (Minterm) Sei $n > 0$ die Zahl der im Trägerbereich eines Booleschen Verbandes vorkommenden verschiedenen Literale. Ein Minterm ist die Verknüpfung aller n Literale durch die \sqcap -Operation, wobei kein Literal doppelt vorkommt.

Satz 2.27 Mit $n > 0$ Variablen kann man 2^n verschiedene Minterme erzeugen.

Beweis: (Vollständige Induktion) Sei $n = 1$. Dann gibt es nur eine Variable, sie heiße a_1 und zwei Minterme, nämlich a_1 und \bar{a}_1 . Die Behauptung gilt also fur $n = 1$.

Angenommen die Behauptung gelte fur n Variablen, es gebe also $S_n = 2^n$ Minterme. Jeder dieser Minterme hat die Form

$$m_i^n = x_1 \sqcap x_2 \sqcap \dots \sqcap x_n, \text{ wobei } x_i = a_i \text{ oder } \bar{a}_i$$

Fugt man eine weitere Variable a_{n+1} hinzu, so sehen die Minterme wie folgt aus:

$$m_i^{n+1} = x_1 \sqcap x_2 \sqcap \dots \sqcap x_n \sqcap x_{n+1}, \text{ wobei } x_i = a_i \text{ oder } \bar{a}_i$$

Dann gilt:

$$m_i^{n+1} = (x_1 \sqcap x_2 \sqcap \dots \sqcap x_n) \sqcap x_{n+1}$$

Der geklammerte Ausdruck ist einer der 2^n Minterme m_i^n , also gilt:

$$m_i^{n+1} = m_i^n \sqcap x_{n+1}$$

d.h., jeder Minterm fur n Variablen spaltet sich in zwei Minterme fur $n + 1$ Variablen auf, nämlich in:

$$m_i^n \sqcap a_{n+1} \text{ und } m_i^n \sqcap \bar{a}_{n+1}$$

Insgesamt gibt es also

$$S_{n+1} = 2 \cdot S_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Minterme fur $n + 1$ Variablen. ■

Definition 2.17 (kanonische Disjunktive Normalform) Eine Boolesche Funktion ist in kanonischer disjunktiver Normalform, wenn sie eine \sqcup -Verknüpfung (Disjunktion) von Mintermen der Funktion ist, wobei kein Minterm doppelt auftaucht.

Die konstanten Funktionen 0 und 1 sind ebenfalls in kanonischer disjunktiver Normalform für alle $n \geq 0$.

Satz 2.28 Die kanonische disjunktive Normalform, die bei n Variablen alle 2^n Minterme enthält, entspricht der 1.

Beweis: Von den 2^n Mintermen enthalten 2^{n-1} das Literal a_1 und 2^{n-1} das Literal \bar{a}_1 , wie bereits im Beweis von Satz 2.27 zu erkennen war. Aus den 2^{n-1} Mintermen, die das Literal a_1 enthalten, wird a_1 durch mehrfache Anwendung von (V4a) „ausgeklammert“. Ebenso wird mit dem Literal \bar{a}_1 verfahren. Die beiden jeweils verbleibenden Terme sind gemäß Beweis von Satz 2.27 identisch, wodurch sich die Disjunktion aller Minterme in der Form $(a_1 \sqcap q) \sqcup (\bar{a}_1 \sqcap q) \stackrel{(\text{Satz 2.25})}{=} q$ schreiben läßt, wobei q der identische Restterm ist.

Wendet man nun auf q die gleiche Technik nocheinmal an, klammert jedoch a_2 aus, so kann man q schreiben als $(a_2 \sqcap r) \sqcup (\bar{a}_2 \sqcap r) \stackrel{\text{Satz 2.25}}{=} r$, wobei r der verbleibende Restterm ist.

Anwendung dieser Technik bis zur Ausklammerung von a_{n-1} ergibt als Restterm $a_n \sqcup \bar{a}_n \stackrel{(\text{Def. 2.12})}{=} 1$. ■

Satz 2.29 Jede Boolesche Funktion läßt sich in die kanonische disjunktive Normalform umformen.

Beweis: Dieser Beweis wird durch die Angabe eines Konstruktionsverfahrens geführt. Das Verfahren funktioniert wie folgt:

Sei f eine beliebige Boolesche Funktion von n Variablen, einschließlich der Konstanten 0 und 1. Wenn f Ausdrücke der Form $\overline{(a \sqcup b)}$ oder $\overline{(a \sqcap b)}$ enthält, so ergibt die Anwendung von Satz 2.23 $\bar{a} \sqcap \bar{b}$ bzw. $\bar{a} \sqcup \bar{b}$. Das wiederholt man solange, bis jede Komplement-Überstreichung nur noch über einer einzigen Variablen/Konstanten steht. Gemäß Satz 2.19 werden doppelte Negationen aufgelöst. Durch Anwendung von (V4a) und (V4b) erhält man Glieder, deren Literale nur durch \sqcap verbunden sind, und diese Glieder sind wiederum nur durch \sqcup verknüpft. Enthält eines dieser Glieder eine 0, so ist gemäß Definition 2.5 das ganze Glied gleich 0 und kann daher gemäß Definition 2.5 ersatzlos entfallen, falls noch ein anderes Glied vorhanden ist. Ist das einzige verbleibende Glied eine 0, so ist das Verfahren beendet. Enthält eines dieser Glieder eine 1, so entfällt gemäß Definition 2.5 die 1, falls noch ein anderes Literal in dem Glied vorkommt. Ist eines der Glieder gleich 1, so ist gemäß Definition 2.5 die gesamte Disjunktion gleich 1 und das Verfahren damit beendet. Angenommen ein Glied g der Disjunktion enthält weder die Variable a_i noch deren Komplement \bar{a}_i . Dann ist $g \stackrel{(\text{Satz 2.25})}{=} (a_i \sqcap g) \sqcup (\bar{a}_i \sqcap g)$. Wiederholt man diesen Schritt für jede fehlende Variable in jedem Glied der Disjunktion, so erhält man schließlich eine Disjunktion von Mintermen. Satz 2.2 erlaubt es, doppelt vorkommende Glieder wegzulassen. Dann ist die entstandene Disjunktion von Mintermen eine kanonische disjunktive Normalform.

Da im beschriebenen Konstruktionsverfahren nur substituiert wird, also nur Gleichungen verwendet werden, ist das Verfahren auch umkehrbar, d.h. Boolesche Funktionen in kanonischer DNF teilen die Menge der Booleschen Funktionen in Klassen äquivalenter Funktionen ein. ■

Satz 2.30 *Bei n Variablen lassen sich genau $2^{(2^n)}$ verschiedene disjunktive Normalformen bilden.*

Beweis: Bei n Variablen kann jeder der 2^n Minterme in einer kanonischen disjunktiven Normalform vorkommen oder nicht, kann etwas zu der Disjunktion beitragen oder nicht. Entsprechend der bekannten kombinatorischen Grundregel zur Variation mit Wiederholung ergibt sich daher:

$$\underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{2^n} = 2^{(2^n)}$$

Ein andere Beweismöglichkeit beruht auf dem „Auswählen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“. Das entspricht der Art und Weise des Auswählens der Minterme, denn erstens wird jeder Minterm nur einmal verwendet und zweitens ist die Reihenfolge beliebig, da die Disjunktion kommutativ ist. Für diesen Fall ist die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von k Objekten aus einer Menge von l gleich $\binom{l}{k}$. Für den Fall der Minterme, die die kanonischen disjunktiven Normalformen bilden sollen, muß man die Auswahlen aller $k = 0 \dots 2^n$ aus $l = 2^n$ Mintermen betrachten. Dann ist die Anzahl der verschiedenen kanonischen disjunktiven Normalformen gleich

$$\sum_{i=0}^{2^n} \binom{2^n}{i} = 2^{(2^n)},$$

ein bekanntes Ergebnis der Kombinatorik. Dabei entspricht das Auftauchen keines Mintermes der konstanten Funktion 0 und das Auftauchen aller Minterme gemäß Satz 2.28 der konstanten Funktion 1. ■

Satz 2.31 *Es gibt bei n Variablen genau $2^{(2^n)}$ Äquivalenzklassen verschiedener Boolescher Funktionen.*

Beweis: Da jede Boolesche Funktion mit n Variablen in eine Boolesche Funktion in kanonisch disjunktiver Normalform mit n Variablen umgeformt werden kann (Satz 2.29) und es für n Variablen genau $2^{(2^n)}$ verschiedene kanonische disjunktive Normalformen gibt, heißt das, daß es genau $2^{(2^n)}$ verschiedene Boolesche Funktionen für n Variablen gibt. ■

2.2 Bemerkungen zum Hintergrundkalkül

Ganz unwillkürlich sind in den vorherigen Abschnitten Schlüsse gezogen worden, Ausdrücke für andere eingesetzt, und anderes, über das man eigentlich reflektieren müßte. Im Hintergrund steht offenbar ein weiterer

Kalkül, in den die Verbandstheorie eingebettet ist. Dieser Kalkül wird aber teilweise nur in umgangssprachlicher Form benutzt.

Da gibt es Zeichen, wie z.B. \Leftrightarrow , \Rightarrow , \Leftarrow , „“, \wedge , \forall , aber auch Formulierungen wie z.B. „Wenn ... dann ...“, „... genau dann, wenn ...“, „und“, „für alle“, „es gibt“, usw.

Und da gibt es offenbar einige Regeln, nach denen geschlossen wird. Im allgemeinen nennt man soetwas „Logik“. In späteren Kapiteln werden wir sehen, daß die Grundlage der bedeutenden Logiken ebenfalls Boolesche Verbände sind. D.h., wenn man es genau nimmt, dann haben wir Sätze der Verbände/Booleschen Verbände mit Hilfe von Sätzen der Booleschen Verbände bewiesen. Die Konsequenzen dieser Tatsache überschreiten jedenfalls die Vorgaben dieser Arbeit, und werden demzufolge nicht weiter behandelt, man sollte sich ihrer aber bewußt sein.

In einem Beweis ist vollständige Induktion verwendet worden, in einem anderen wurde ein Ergebnis der Kombinatorik verwendet. Insgesamt scheint dieser logische Hintergrundkalkül sehr stark zu sein, stärker jedenfalls als die Verbandstheorie.

Eines ist auffällig: Der Boolesche Gleichungskalkül (Axiome V1 - V4 + Zusätze) verfügt über keine explizit aufgeschriebenen Grundregeln, nur über Grundformeln. Ununterbrochen wird allerdings zumindest eine Regel angewendet, nämlich die Einsetzungs- oder auch Substitutionsregel. Die über den Gleichheitszeichen gesetzten Anmerkungen in den vorherigen Abschnitten bedeuten daher auch nur, daß die jeweilige **Formel** bei der Anwendung der Einsetzungs**regel** verwendet wurde. Diese Regel erlaubt es, beide Seiten einer Gleichung wechselseitig und füreinander in andere Gleichungen einzusetzen. Die Einsetzungsregel läßt sich so formulieren:

Sei G eine Formel in der der Term A vorkommt. Weiß man außerdem noch $A = B$, oder $B = A$ (Bem. 2.1), so darf man auch die Gleichung G' schreiben, in der (mindestens) ein Vorkommen von A durch B ersetzt worden ist.

Im Booleschen Gleichungskalkül $BV^=$ ist diese Regel in ihrer allgemeinen Form nicht zu formulieren, sie ist im Hintergrundkalkül eingebettet. Sie hätte aber für den im letzten Abschnitt vorgenommenen Vergleich von Gleichungskalkül und Halbordnungskalkül im Halbordnungskalkül bewiesen werden müssen, wenn man annimmt, daß sie nicht auch im Hintergrund von BV^{\square} zur Verfügung steht. Das könnte man annehmen, denn sie wurde für die bisherigen Beweise im Kalkül BV^{\square} nicht benutzt.

Tatsächlich wird die Substitutionsregel aber meistens zum axiomatischen Hintergrund jedes dieser Kalküle gehörig betrachtet, obwohl ein Beweis der Regel für den Halbordnungskalkül (zuzgl. einiger formaler Erweiterungen, sowie vollständiger Induktion) möglich ist. Dieser Beweis findet sich erst in Abschnitt 4.1.2.

2.3 Eine Erweiterung des Hintergrundkalküls

Was dem Hintergrundkalkül noch fehlt, bzw. bisher noch nicht verwendet wurde, logisch aber durchaus machbar ist, ist die Möglichkeit, die Ausdrücke des Logikkalküls zu negieren (komplementieren). Dann gibt es in dem Kalkül die Möglichkeit zu kontraponieren, es gilt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$, wenn A und B Ausdrücke des Objektkalküls sind. Die Kontraposition beruht auf der zweimaligen Anwendung der Transportationsregel von Peirce, die ebenfalls im logischen Hintergrundkalkül gilt.

Setzt man für die Terme des Hintergrundkalküls Formeln der Booleschen Verbände ein, so erhält man $\overline{a \sqsubseteq b}$ oder in anderer Schreibweise $a \not\sqsubseteq b$ und $\overline{a = b}$ bzw. $a \neq b$.

Diese Negation der Booleschen Formeln macht Sinn, denn es ist durchaus legitim, sich Gedanken über die Beziehungen „ a ist nicht kleiner-gleich b “ bzw. „ a ungleich b “ zu machen, bzw. über die Verbindungen zu den unnegierten Beziehungen.

Einige Beispiele sollen nun zeigen, wie diese Technik angewendet werden kann:

Satz 2.32 *Es gilt: $a \sqcup b \not\sqsubseteq 0, a \sqsubseteq 0 \Rightarrow b \not\sqsubseteq 0$.*

Beweis: Durch zweimalige Anwendung der Transportationsregel des Hintergrundkalküls auf $a \sqcup b \not\sqsubseteq 0, a \sqsubseteq 0 \Rightarrow b \not\sqsubseteq 0$ erhält man $a \sqsubseteq 0, b \sqsubseteq 0 \Rightarrow a \sqcup b \sqsubseteq 0$. Diese Folgerung ergibt sich unmittelbar aus Satz 2.10. ■

Satz 2.33 *Es gilt: $a \not\sqsubseteq 0 \Rightarrow (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap \overline{b}) \not\sqsubseteq 0$.*

Beweis: Durch Kontraposition ergibt sich, daß $a \sqsubseteq 0$ aus $(a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap \overline{b}) \sqsubseteq 0$ folgen müßte. Es ist $(a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap \overline{b}) \stackrel{(V4a)}{=} a \sqcap (b \sqcup \overline{b}) \stackrel{(\text{Bem. } 2.7)}{=} a \sqcap 1 \stackrel{(\text{Def. } 2.5)}{=} a$. Daher folgt aus $(a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap \overline{b}) \sqsubseteq 0$ daß gilt: $a \sqsubseteq 0$. ■

Satz 2.34 *Es gilt: $a \not\sqsubseteq b \Leftrightarrow a \sqcap \overline{b} \not\sqsubseteq 0$.*

Beweis: Durch Kontraposition erhält man: $a \sqsubseteq b \Leftrightarrow a \sqcap \overline{b} \sqsubseteq 0$. Das ist bereits in Satz 2.22 bewiesen worden. ■

Satz 2.35 *Es gilt: $a \sqsubseteq b, a \not\sqsubseteq 0 \Rightarrow a \sqcap b \not\sqsubseteq 0$.*

Beweis: Durch Transportation im Hintergrundkalkül erhält man $a \sqsubseteq b, a \sqcap b \sqsubseteq 0 \Rightarrow a \sqsubseteq 0$, was bereits in Satz 2.12 bewiesen wurde. ■

Sätze, die negierte Beziehungen enthalten, werden also zunächst mittels Kontraposition oder Transportation in Sätze transformiert, die keine solchen negierten Beziehungen enthalten. Diese Sätze können dann mit den üblichen Methoden der Booleschen Verbände behandelt werden.

2.4 Das Venn-Diagramm

Um ein Venn-Diagramm einwandfrei definieren zu können, ist es zunächst notwendig, einige grundlegende geometrische und topologische Begriffe eindeutig festzulegen.

Definition 2.18 (Region) Eine Region ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 .

Bemerkung 2.10 Das Komplement einer Region ist wieder eine Region.

Definition 2.19 (innerer Punkt) Ein Punkt heißt innerer Punkt einer Region, wenn es eine Umgebung um diesen Punkt gibt, die vollständig in der Region enthalten ist.

Definition 2.20 (äußerer Punkt) Ein Punkt heißt äußerer Punkt, wenn er innerer Punkt des Komplements der Region ist.

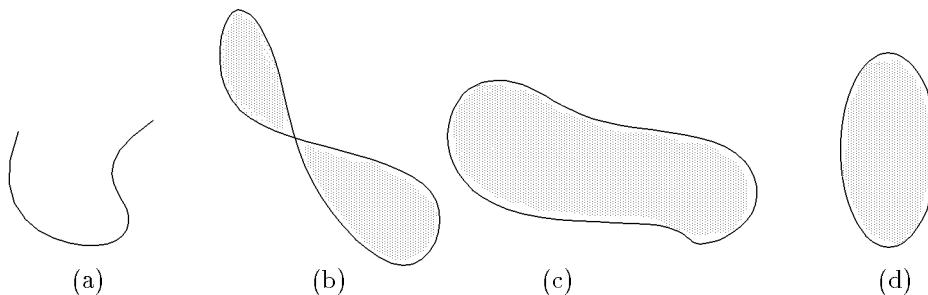
Definition 2.21 (Rand einer Region) Randpunkt einer Region ist ein Punkt, der weder innerer noch äußerer Punkt ist. Die Menge der Randpunkte bildet den Rand einer Region.

Definition 2.22 (Kurve) Eine Punktmenge heißt eine Kurve, wenn eine stetige, injektive Abbildung eines Intervalles auf diese Menge existiert.

Definition 2.23 (zusammenhängende Region) Eine Region heißt zusammenhängend, wenn zwei beliebige verschiedene Punkte der Region durch eine Kurve verbunden werden können, deren Punkte nur Punkte der Region sind.

Definition 2.24 (konvexe Region) Eine Region ist konvex, wenn zwei beliebige verschiedene Punkte der Region durch eine Strecke verbunden werden können, deren Punkte nur innere Punkte der Region sind.

Zur Verdeutlichung einige Beispiele von Kurven und Regionen:



(a) ist eine Kurve, (b) ist eine zusammenhängende Region, wenn der „Kreuzungspunkt“ zur Region gehört, sonst ist die Region nicht zusammenhängend, (c) ist eine zusammenhängende Region, (d) ist eine konvexe Region und daher natürlich auch zusammenhängend.

Definition 2.25 (offener Kern) *Der offene Kern einer Region ist die Menge der inneren Punkte der Region.*

Definition 2.26 (offene Region) *Eine Region heißt offen, wenn der offene Kern einer Region die gesamte Region ist, wenn sie also nur aus inneren Punkten besteht.*

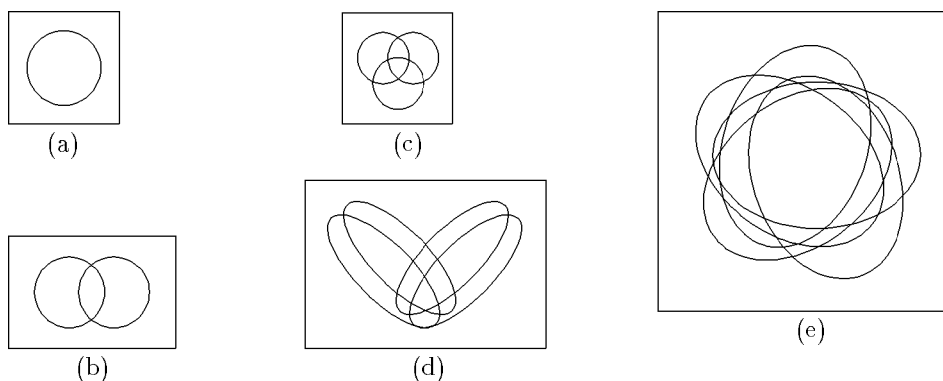
Definition 2.27 (Schnitt von Regionen) *Ein Schnitt zweier Regionen ist die Schnittmenge der beiden Regionen und selbst wieder eine Region.*

Definition 2.28 (unabhängige Familie von Regionen) *Es sei $A = A_1, \dots, A_n$ eine Familie von n Regionen. A ist eine unabhängige Familie von Regionen, wenn die Regionen offen und zusammenhängend sind, die Komplemente der Regionen zusammenhängend und jeder Schnitt $y_1 \cap \dots \cap y_n$ von Regionen existiert (also nicht leer ist), wobei y_i entweder die Region A_i oder der offene Kern des Komplements von A_i ist.*

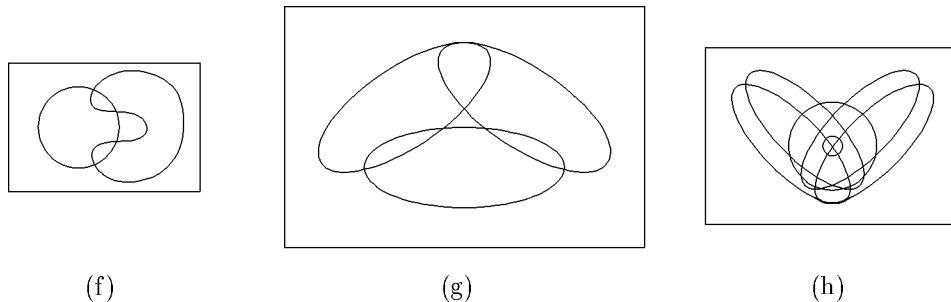
Definition 2.29 (Venn-Diagramm) *Sei $A = A_1, \dots, A_n$ eine unabhängige Familie von Regionen. Ein Venn-Diagramm besteht aus einer endlichen Region, genannt der Rahmen des Diagrammes, sowie im Inneren des Rahmens aus einer unabhängigen Familie von Regionen A , wobei die Schnitte $y_1 \cap \dots \cap y_n$ zusätzlich offene zusammenhängende Regionen sein müssen, die Zellen des Venn-Diagrammes genannt werden.*

Bemerkung 2.11 (Venn-Diagramm) *Der Rahmen um die unabhängige Familie von Regionen im Venn-Diagramm bezeichnet das sogenannte „Univers of Discurs“, und grenzt die unendliche Punktebene auf einen kleinen Bereich ein, der nur die n betrachteten Regionen enthält. Dieses ist notwendig, damit die später noch einzuführende Schraffierungsoperation auf den Regionen endlich ist.*

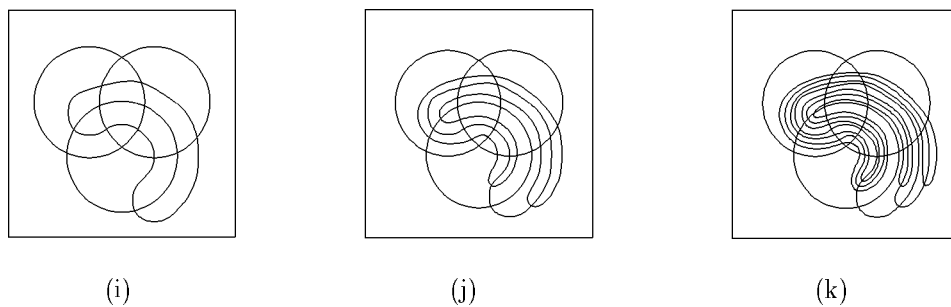
Einige Beispiele von Venn-Diagrammen:



(a) ist ein Venn-Diagramm mit einer Region, (b) ein Venn-Diagramm mit zwei Regionen, (c) ein Venn-Diagramm mit drei Regionen, (d) ein Venn-Diagramm mit vier Regionen und (e) ein Venn-Diagramm mit fünf Regionen. Besonderes Kennzeichen dieser Diagramme ist, daß die verwendeten Regionen konvex sind.



(f) zeigt kein Venn-Diagramm, denn zwei der Schnitte sind nicht zusammenhängend. (g) ist nicht einmal eine unabhängige Familie, denn der Schnitt der drei Regionen ist leer. (h) zeigt ein Diagramm mit fünf Regionen, das oft als Venn-Diagramm bezeichnet wird. Im Sinne der Definition 2.29 trifft das jedoch nicht zu, denn die fünfte Region ist ein Ring, das Komplement dieser Region daher nicht zusammenhängend.



(i) zeigt ein weiteres Venn-Diagramm mit vier Regionen. Die vierte Region ist aber nicht mehr konvex. Dieses Diagramm bildet den Ausgangspunkt einer ganzen Reihe von Diagrammen. Gezeigt seien hier nur die Diagramme mit fünf (j) und sechs (k) Regionen. Jedes Diagramm entsteht aus dem vorherigen, indem der Rand der $n-1$ -ten Region in einer „schlauchförmigen“ neuen Region verpackt wird. Diese Konstruktion läßt sich bis zu einem beliebigen n fortsetzen, allerdings gibt es bald zeichentechnische Probleme.

Definition 2.30 Die n Variablen a_1, \dots, a_n eines endlichen Booleschen Verbandes seien in beliebiger, z.B. alphabetischer, aber letztlich fester Reihenfolge geordnet. Dann wird jedem Minterm $X = x_n \dots x_1$ für n Variablen in einem Venn-Diagramm mit einer unabhängigen Familie von n Regionen A_1, \dots, A_n die Zelle zugeordnet, die sich als Schnitt von n Regionen ergibt, wobei jeweils die Region A_i berücksichtigt wird, wenn $x_i = a_i$ ist, oder aber der offene Kern des Komplements von A_i , wenn $x_i = \overline{a_i}$ ist.

Satz 2.36 Die in Definition 2.30 beschriebene Abbildung ist bijektiv.

Beweis: Unterscheiden sich zwei Minterme für n Variablen an mindestens einer Stelle, so werden sie auch mit unterschiedlichen Zellen im Venn-Diagramm identifiziert, da dann der Schnitt mit dem Komplement einer Region durchgeführt wird und nicht mit der Region selbst (bzw. umgekehrt). Die Abbildung ist also injektiv.

Die Definition des Venn-Diagrammes legt fest, daß für eine unabhängige Familie von n Regionen jeder der Schnitte $y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_n$ eine offene zusammenhängende Region ist, wobei jedes y_i entweder die (offene) Region A_i oder der offene Kern des Komplements von A_i ist. Jedes der y_i kann also in den Schnitten $y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_n$ zwei Regionen darstellen. Daher gibt es rein kombinatorisch mindestens 2^n verschiedene Zellen in einem Venn-Diagramm. Jeder dieser Schnitte ist nach Definition zudem zusammenhängend, d.h., es gibt genau 2^n Zellen in einem Venn-Diagramm.

Daher ist für die Abbildung aus Definition 2.30 die Anzahl der Bilder (Zellen) gleich der Anzahl der Urbilder (Minterme), die Abbildung ist daher surjektiv, also insgesamt bijektiv.

■

Aufgrund der Zuordnung der Mintermvariablen zu den Regionen (Def. 2.30 und Satz 2.36), gibt es also eine eindeutige Abbildung zwischen den Zellen im Venn-Diagramm und den Mintermen Boolescher Funktionen für n Variablen.

Bemerkung 2.12 *Um bestimmte Zellen zu markieren wird im folgenden ein Punkt in den betreffenden Zellen plaziert werden¹*

Nun wird eine Beziehung zwischen beliebigen Booleschen Funktionen und Mengen von Zellen hergestellt.

Definition 2.31 *Seien x und y Boolesche Funktionen, die ein Grundobjekt repräsentieren. Dann sind M_x und M_y Mengen der Zellen, die in der jeweiligen Region liegen, die das Grundobjekt x bzw. y repräsentiert. Dann gilt:*

- $M_{x \cap y} = M_x \cap M_y$.
- $M_{x \cup y} = M_x \cup M_y$.
- 0 wird mit dem Schnitt aller Zellen identifiziert, d.h., da die Zellen disjunkt sind, mit der leeren Punktmenge, also mit keiner Zelle, abgekürzt M_0 .
- 1 wird mit der Vereinigung aller Zellen identifiziert, mit dem gesamten Diagramm (ohne Ränder), abgekürzt M_1 .
- $M_{\bar{x}} = M_1 \setminus M_x$.

Mit dieser Definition haben wir die sogenannten Vennschen **Umfangs-Diagramme** definiert. Wir hätten genauso gut sog. **Inhalts-Diagramme** definieren können. Im folgenden werden wir uns nur mit den Umfangs-Diagrammen beschäftigen, dieses also auch nicht mehr gesondert erwähnen. Wer sich für die Inhaltsdiagramme interessiert, sollte in [5] nachlesen.

¹Diese Art der Markierung wurde in [5] eingeführt.

Satz 2.37 Die in Definition 2.31 definierte Abbildung, genannt „ h “, zwischen Booleschen Funktionen und Mengen von Zellen ist ein Isomorphismus.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} h(x \sqcap y) &= M_{x \sqcap y} \\ &= M_x \cap M_y \\ &= h(x) \cap h(y) \end{aligned}$$

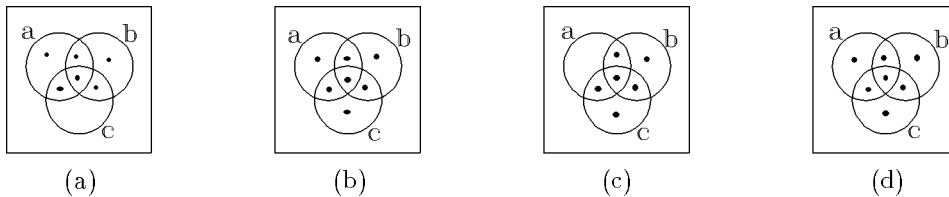
$$\begin{aligned} h(x \sqcup y) &= M_{x \sqcup y} \\ &= M_x \cup M_y \\ &= h(x) \cup h(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\bar{x}) &= M_1 \setminus M_x \\ &= h(1) \setminus h(x) \end{aligned}$$

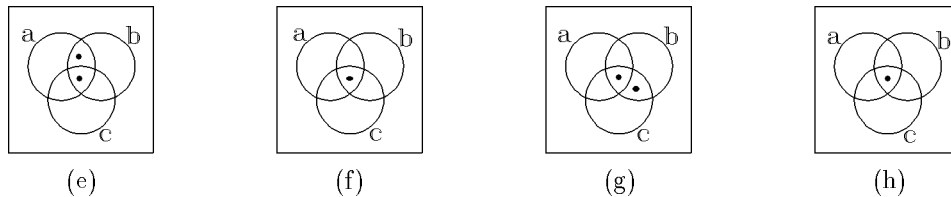
h ist also ein Homomorphismus. Aus dem Beweis von Satz 2.36 hat sich ergeben, daß ein Venn-Diagramm mit einer unabhängigen Familie von n Regionen genau 2^n Zellen enthält, die eineindeutig auf die 2^n Minterme Boolescher Verbände für n Variablen abgebildet werden. Mehrere Zellen können zu einem größeren Bereich zusammengefaßt werden. Dieses entspricht nach Definition 2.31 der Disjunktion der entsprechenden Minterme. Die gleiche Argumentation wie in Satz 2.30 führt dazu, daß sich $2^{(2^n)}$ verschiedene Zellenkombinationen bilden lassen. Nach Satz 2.31 gibt es $2^{(2^n)}$ verschiedene Boolesche Funktionen für n Variablen. Die Abbildung h ist also surjektiv, daher insgesamt bijektiv und damit ein Isomorphismus. ■

Satz 2.38 Alle Axiome des Booleschen Verbandes lassen sich im Venn-Diagramm verifizieren.

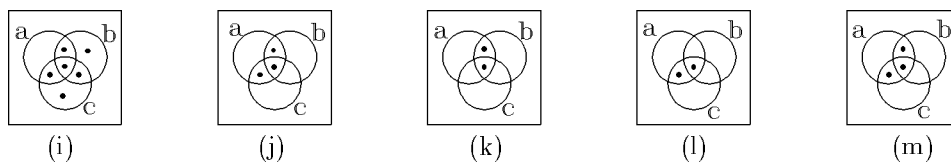
Beweis: Wir bilden die Vereinigung von a und b (a) und vereinigen das Ergebnis mit c (b). Andererseits vereinige man a mit der Vereinigung von b und c (c). Das Ergebnis (d) ist identisch mit (b).



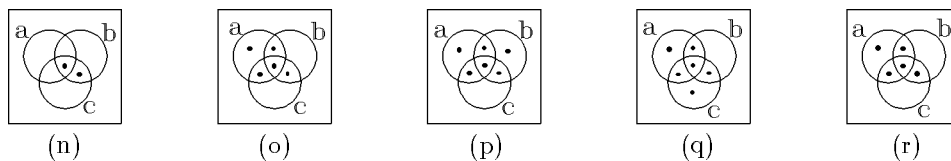
Damit ist (V1a) bewiesen. Nun bilden wir den Schnitt von a und b (e) und schneiden das Ergebnis mit c (f). Andererseits schneide man a mit dem Schnitt von b und c (g). Das Ergebnis (h) ist identisch mit (f).



Damit ist (V1b) bewiesen. Es ist im Venn-Diagramm völlig beliebig, ob der Schnitt von a und b oder der Schnitt von b und a gebildet wird. Betroffen ist (sind) immer die gleiche(n) Zelle(n). Ebensozliches gilt für die Vereinigung von a und b und die Vereinigung von b und a . Damit sind auch (V2a) und (V2b) erledigt. Schneidet man a mit der Vereinigung von a und b , so bleiben die Zellen von a , womit (V3a) bewiesen ist. Vereinigt man a mit dem Schnitt von a und b , so bleiben die Zellen von a , daher ist auch (V3b) bewiesen. Schneidet man a mit der Vereinigung von b und c (i), so ist das Ergebnis (j). Vereinigt man den Schnitt von a und b (k) mit dem Schnitt von a und c (l), so ist das Ergebnis (m) identisch mit (j).



Damit ist (V4a) bewiesen. Vereinigt man a mit dem Schnitt von b und c (n), so ist das Ergebnis (o). Schneidet man die Vereinigung von a und b (p) mit der Vereinigung von a und c (q), so ist das Ergebnis (r) identisch mit (o).



Damit ist (V4b) bewiesen. Die leere Menge vereinigt mit den Zellen von a ergibt die Zellen von a . D.h. es ist $0 \sqcup a = a$. Daher ist die leere Punktmenge das Null-Objekt. Das gesamte Diagramm M_1 geschnitten mit den Zellen, die a repräsentieren, ergibt wieder die Zellen von a . D.h. es ist $1 \sqcap a = a$. Daher ist M_1 das Eins-Objekt. Das Innere der Region, die a repräsentiert, vereinigt mit dem offenen Kern des Komplements der von a repräsentierten Region ergibt nach Definition das gesamte Diagramm, ist also 1. Das Innere der Region, die a repräsentiert, geschnitten mit dem offenen Kern des Komplements der a repräsentierenden Region ergibt nach Definition der Diagramme den leeren Schnitt, ist also 0. Daher erfüllt der offene Kern des Komplements der a repräsentierenden Region die Bedingungen der Booleschen Komplementdefinition. Eine vergleichbare Form der Substitutionsregel gilt, zumindest auf dieser Stufe der Einführung der Venn-Diagramme, auch im Hintergrund der Diagramme. Wie sonst hätte man auch die Booleschen Gleichungen bearbeiten können. Ein Beweis der Substitutionsregel ist daher nicht notwendig.

■

Satz 2.39 *Ein endlicher Boolescher Verband mit n Variablen ist isomorph mit einem Venn-Diagramm mit einer unabhängigen Familie von n Regionen.*

Beweis: Mit dem Beweis von Satz 2.38 ist gezeigt, daß sich mit Venn-Diagrammen alles machen läßt, was in endlichen Booleschen Verbänden möglich ist. Umgekehrt zeigte der Beweis von Satz 2.37 die Isomorphie des Booleschen Verbandes mit den Venn-Diagrammen. Weitere Axiome haben die Venn-Diagramme in dem Sinne nicht. ■

Satz 2.40 *Mit Kreisen können nur Venn-Diagramme bis $n = 3$ erzeugt werden. Mit Ellipsen kann man bis $n = 5$ kommen. Siehe dazu [3].*

Beweis: Für ein zusammenhängendes Netz in der Ebene gilt der Euler Satz:

$$e - k + f = 2$$

wobei e die Zahl der Schnittpunkte, k die Zahl der Kanten und f die Zahl der Zellen ist, die durch das Netz in der Ebene erzeugt werden.

Das Netz werde durch die Ränder einer unabhängigen Familie von n Regionen erzeugt, wie sie für Venn-Diagramme definiert sind. Es können $\binom{n}{2}$ Regionen-Paare aus den n Regionen kombiniert werden. Schneiden sich je 2 Regionen-Ränder in j Punkten, und haben keine 3 Regionen-Ränder einen gemeinsamen Punkt, so hat das Netz $e \leq j \cdot \binom{n}{2}$ Schnittpunkte und $k = 2 \cdot e$ Kanten. Dann vereinfacht sich der Euler-Satz zu:

$$f - e = 2$$

Für ein Venn-Diagramm ist $f = 2^n$. Daher gilt:

$$2^n - e = 2$$

Einsetzen der Ergebnisse für Schnittpunkte und Kanten ergibt:

$$2^n - j \cdot \binom{n}{2} \geq 2$$

Umgeformt nach j ergibt sich:

$$j \geq \frac{(2^n - 2)}{\binom{n}{2}} = \frac{4 \cdot (2^{n-1} - 1)}{n \cdot (n - 1)}$$

Die Ränder zweier kreisförmiger Regionen schneiden sich in maximal 2 Punkten, die Ränder zweier ellipsenförmiger Regionen in maximal 4 Punkten. j ist also für Kreise gleich 2 und obige Formel ist erfüllbar für $n < 4$. Für Ellipsen ist j gleich 4, und obige Formel ist erfüllbar für $n < 6$. ■

Kapitel 3

Operationen im Venn-Diagramm

Bisher haben wir lediglich bestimmte Zellen im Venn-Diagramm bestimmten Booleschen Ausdrücken zugeordnet und konnten auf diese Art und Weise die Äquivalenzen Boolescher Ausdrücke nachvollziehen. Es wurden nur Terme betrachtet.

Was ist aber nun mit Beziehungen, z.B. der Halbordnung \sqsubseteq ? Es stellt sich natürlich die Frage ihrer Repräsentation in Venn-Diagrammen.

Nach Satz 2.13 gilt $a \sqsubseteq b \Leftrightarrow a \sqcap b = a$. D.h., die Zelle $a \sqcap b$ macht bereits das gesamte a aus. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß die Zelle $a \sqcap \bar{b}$ nicht existiert.

Ein Venn-Diagramm für zwei Variablen enthält vier Zellen, nämlich $\bar{a} \sqcap \bar{b}$, $a \sqcap \bar{b}$, $\bar{a} \sqcap b$ und $a \sqcap b$.

Man fragt sich unwillkürlich, was es bedeutet, wenn die drei restlichen Zellen jeweils nicht existieren.

$a \sqsubseteq \bar{b}$ entspricht $a \sqcap \bar{b} = a$, d.h. $a \sqcap b$ existiert nicht.

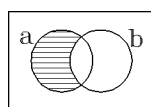
$\bar{a} \sqsubseteq b$ entspricht $\bar{a} \sqcap b = \bar{a}$, d.h. $\bar{a} \sqcap \bar{b}$ existiert nicht.

$\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$ entspricht $\bar{a} \sqcap \bar{b} = \bar{a}$, d.h. $\bar{a} \sqcap b$ existiert nicht.

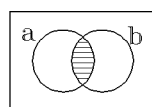
Es ist also sinnvoll, eine Operation im Venn-Diagramm einzuführen, die es erlaubt bestimmte Zellen als nicht-existent zu kennzeichnen.

3.1 Streichen von Zellen

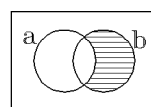
Es ist üblich, die nicht existierenden Zellen im Diagramm zu streichen, zu schraffieren. Dann sehen die vier verschiedenen Halbordnungsvarianten wie folgt aus:



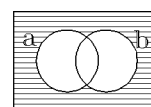
$$a \sqsubseteq b$$



$$a \sqsubseteq \bar{b}$$

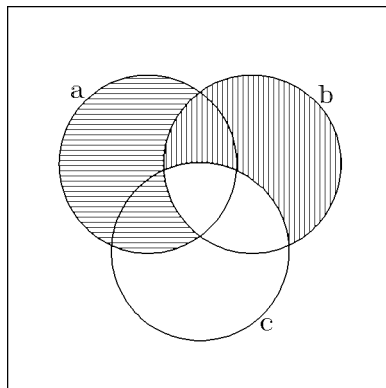


$$\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$$

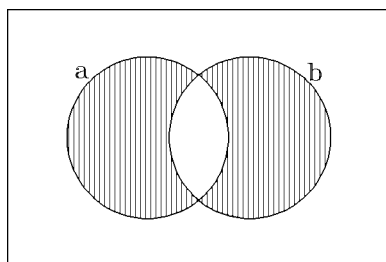


$$\bar{a} \sqsubseteq b$$

Von einer Streichung können auch mehrere Zellen betroffen sein. Es gelte z.B. $a \sqsubseteq b$ und $b \sqsubseteq c$. Aus diesen Vorgaben ist insbesondere $a \sqsubseteq c$ ablesbar.



So nebenbei ist damit auch (H3), eines der Axiome der Halbordnungsstrukturdefinition bewiesen. Gilt $a \sqsubseteq b$ und $b \sqsubseteq a$, so existieren die Zellen $a \cap \bar{b}$ und $\bar{a} \cap b$ nicht, sind also schraffiert, somit existiert nichts von a außerhalb von b und nichts von b außerhalb von a . Es ist also $a = b$.



Daher ist (H2) bewiesen. Der Schnitt von a mit a ergibt wiederum a , es gilt daher gemäß Übersetzung $a \cap a = a$. Nach Definition ist das gleichbedeutend mit $a \sqsubseteq a$ (H1). Der Schnitt von a mit a läßt sich kaum richtig im Venn-Diagramm darstellen, würde er doch verlangen, zwei verschiedene Regionen im Diagramm zu haben, die a repräsentieren sollen, was aber die Definition nicht erlaubt.

In Satz 2.38 war zu sehen, daß die beiden Seiten der beiden Distributivgesetze die gleichen Zellen im Venn-Diagramm betreffen. Betrachtet man nun die in (H4) aufgeführten Halbordnungen, so müssen durch diese keine Zellen gestrichen werden, denn keine Zelle ist links und nicht rechts.

3.2 „Sternen“ von Zellen

Die logische Einbettung der Booleschen Verbände erlaubte die Behandlung negierter Gleichungen bzw. Halbordnungen. Die Negation der Halbordnungsbeziehung kann dagegen im Venn-Diagramm direkt behandelt werden:

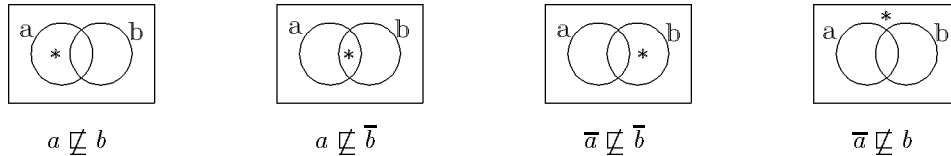
$a \not\sqsubseteq b$ entspricht $a \sqcap b \neq a$, d.h. $a \sqcap \bar{b}$ existiert.

$a \not\sqsubseteq \bar{b}$ entspricht $a \sqcap \bar{b} \neq a$, d.h. $a \sqcap b$ existiert.

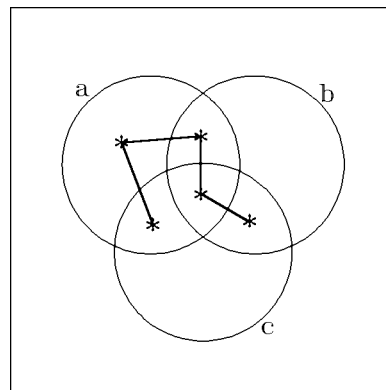
$\bar{a} \not\sqsubseteq b$ entspricht $\bar{a} \sqcap b \neq \bar{a}$, d.h. $\bar{a} \sqcap \bar{b}$ existiert.

$\bar{a} \not\sqsubseteq \bar{b}$ entspricht $\bar{a} \sqcap \bar{b} \neq \bar{a}$, d.h. $\bar{a} \sqcap b$ existiert.

Das Existieren einer Zelle wird dadurch repräsentiert, daß die entsprechende Zelle mit einem Stern versehen wird. Dann sehen die vier verschiedenen negierten Halbordnungsvarianten wie folgt aus:



Ein Ausdruck kann auch wieder dazu führen, daß mehrere Zellen „gesternt“ werden müssen. Um diese Sterne von den Sternen eventuell vorhandener anderer Ausdrücke zu unterscheiden, sind diese durch einen spannenden Graphen miteinander zu verbinden. Gilt z.B. $a \sqcup (b \sqcap c) \not\sqsubseteq 0$, so wird dieses wie folgt im Venn-Diagramm dargestellt:



Was bedeuten nun die durch die Striche verbundenen Sterne? Sie bedeuten, daß mindestens eine der gekennzeichneten Zellen existieren muß, nicht etwa alle. Das ist so, weil es sich um eine Verneinung der Halbordnung handelt. Das Schraffieren mehrerer Zellen durch eine Halbordnungsbeziehung bedeutet, daß alle gekennzeichneten Zellen nicht existieren. Negiert man einen solchen Ausdruck, so erhält man einen Ausdruck, der besagt, daß die erste Zelle existiert oder die zweite Zelle existiert oder ... oder die n -te Zelle existiert.

Die Schraffur einer gesterntten Zelle löscht diesen Stern. Diese Löschung kann bedenkenlos vorgenommen werden solange immer noch ein unschraffierter Stern des jeweiligen spannenden Graphen existiert. Sind alle Sterne eines spannenden Graphen schraffiert, so liegt ein Widerspruch in den Voraussetzungen vor.

Die Einführung der Sternungsoperation bewirkt eine echte Verstärkung der Möglichkeiten der Venn-Diagramme gegenüber den normalen „Booleschen“ Fähigkeiten.

3.3 Testen von vermuteten Folgerungen

Die grundlegende Funktion, die in einem Venn-Diagramm ausgeführt werden kann, ist der Test, ob sich eine vermutete Folgerung aus den gegebenen Voraussetzungen tatsächlich folgern läßt.

Dieser Test funktioniert wie folgt: Zunächst muß die Anzahl der beteiligten Grundobjekte bestimmt, und das passende Diagramm gewählt werden. Dann werden die bekannten Voraussetzungen eingetragen. Gleichungen werden dabei in zwei Halbordnungen aufgelöst. Dann wird geprüft, ob die Voraussetzungen die vermutete Folgerung enthalten.

Für die Halbordnung: Es wird geprüft, ob alle Zellen, die für die vermutete Folgerung schraffiert sein müssten, durch die Voraussetzungen schraffiert wurden. Ist dieses der Fall, so folgt die vermutete Folgerung aus den Voraussetzungen, andernfalls folgt sie nicht.

Für die Negation der Halbordnung: Es wird geprüft, ob es mindestens eine Sternsorte aus einer der Voraussetzungen gibt, die nur in den durch die Folgerung vorgegebenen Zellen vorkommt und sonst nirgendwo außerhalb. Ist dieses der Fall, so folgt die vermutete Folgerung, andernfalls folgt sie nicht.

Die eigentlich bemerkenswerteste Eigenschaft der Venn-Diagramme ist, daß die Ergebnisse bezüglich FOLGEN bzw. NICHT-FOLGEN von vermuteten Folgerungen aus den vorgegebenen Voraussetzungen definitiv sind.

Satz 3.1 *Mit Hilfe eines Venn-Diagrammes ist das FOLGEN bzw. NICHT-FOLGEN von vermuteten Folgerungen aus gegebenen Voraussetzungen in Booleschen Verbänden definitiv zu entscheiden.*

Beweis: (1) Die vermutete Folgerung ist eine Halbordnung. Wir betrachten dazu die Voraussetzungen, die unnegierte Halbordnungen sind. Jede dieser Halbordnungen liegt o.B.d.A. (DNF) in der Form $a \sqsubseteq b$ vor, wobei a und b beliebig verknüpfte Variablen, deren Komplemente oder die Konstanten 0 oder 1 sein können. Nach Satz 2.22 gilt dann auch $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq 0$, falls die Halbordnung nicht bereits in dieser Form vorliegt. Die Zellen, die von $a \sqcap \bar{b}$ betroffen sind, werden schraffiert. Dieses wird für jede der betrachteten Voraussetzungen durchgeführt. Mehrfach schraffierte Zellen werden nur einfach gezählt. Die Voraussetzungen liegen danach als eine Menge von Halbordnungen der Form $x_1 \sqcap \dots \sqcap x_n \sqsubseteq 0$ vor, wobei n die Zahl der Grundobjekte ist.

Gemäß Satz 2.10 liegt dann auch die Disjunktion der einzelnen betroffenen Minterme unter 0. Wir betrachten nun die vermutete Folgerung in der gleichen Weise. Dann liegt die vermutete Folgerung ebenfalls als eine Menge von Halbordnungen der Form $x_1 \sqcap \dots \sqcap x_n \sqsubseteq 0$ vor. Ist nun die Menge der Halbordnungen der vermuteten Folgerung eine Teilmenge der Menge der Halbordnungen der Voraussetzungen, so FOLGT die vermutete Folgerung, und aus der Disjunktion der durch die Voraussetzungen betroffenen Minterme können gefahrlos alle Minterme, die nicht in der Menge der Halbordnungen der vermuteten Folgerung liegen, weggelassen werden. Ist andererseits die Menge der Halbordnungen der vermuteten Folgerung keine Teilmenge der Menge der Halbordnungen der Voraussetzungen, so kann die vermutete Folgerung NICHT FOLGEN, denn dann fehlt mindestens eine Halbordnung in der Menge der Halbordnungen der Voraussetzungen. Dann aber ist es unmöglich, mit Hilfe der Voraussetzungen, die Schraffuranforderungen der vermuteten Folgerung zu erfüllen, die vermutete Folgerung kann nicht folgen.

Die Antwort FOLGT ist definitiv, durch die Angabe eines allgemeinen Beweisverfahrens. Die Antwort FOLGT-NICHT ist definitiv durch die Reduktion auf die Minterme, denn fehlende Minterme sind durch nichts zu ersetzen, da die Minterme eindeutig die $2^{(2^n)}$ verschiedenen Booleschen Funktionen charakterisieren.

(2) Die vermutete Folgerung ist die Negation einer Halbordnung. Gibt es keine verneinte Voraussetzung, so kann die vermutete Folgerung nicht folgen. Gibt es verneinte Voraussetzungen, so muß man im allgemeinen verneinte, wie unverneinte Halbordnungen betrachten. Für jede der verneinten Halbordnungen ist die folgende Prozedur durchzuführen:

Jede der verneinten Halbordnungen kann mit Hilfe von Satz 2.33 und Satz 2.34 in die Form $(x_{1,1} \sqcap \dots \sqcap x_{1,n}) \sqcup \dots \sqcup (x_{m,1} \sqcap \dots \sqcap x_{m,n}) \not\sqsubseteq 0$ gebracht werden. Wenn einige der so betroffenen Zellen durch Halbordnungen schraffiert sind, so können diese nach Satz 2.32 aus der Disjunktion der Minterme entfernt werden. Für die übrigbleibenden Zellen jeder verneinten Voraussetzung muß geprüft werden, ob sie eine Teilmenge der Zellen der vermuteten Folgerung sind. Liegt auch nur eine Zelle der Voraussetzung nicht in der Menge der Zellen der vermuteten Folgerung, so ist die Existenz einer Zelle innerhalb der Menge der Zellen der vermuteten Folgerung nicht mehr gesichert. Die vermutete Folgerung behauptet nur, daß mindestens eine der Zellen der vermuteten Folgerung existiert, bezogen auf die verneinte Voraussetzung könnte es dann aber gerade diese außerhalb liegende Zelle sein. Gibt es mindestens eine verneinte Voraussetzung, die die Bedingungen der vermuteten Folgerung erfüllt, so folgt die vermutete Folgerung. Erfüllt keine der Voraussetzungen diese Bedingungen, so kann die vermutete Folgerung nicht folgen.

Die Antwort FOLGT ist definitiv, durch die Angabe eines allgemeinen Beweisverfahrens. Die Antwort

FOLGT-NICHT ist definitiv, denn wenn erstens überhaupt keine verneinte Voraussetzung existiert, kann auch keine verneinte vermutete Folgerung zutreffen oder zweitens ein Stern einer Sternsorte noch außerhalb der vermuteten Folgerung $a \not\subseteq 0$ existiert, also z.B. $a \sqcup b \not\subseteq 0$ gilt, so müßte, damit die vermutete Folgerung $a \not\subseteq 0$ folgt, gelten: $a \sqcup b \not\subseteq 0 \Rightarrow a \not\subseteq 0$. Kontraposition ergibt: $a \subseteq 0 \Rightarrow a \sqcup b \subseteq 0$ und das folgt, wie die Reduktion auf die Minterme zeigt, in keinem Fall.

■

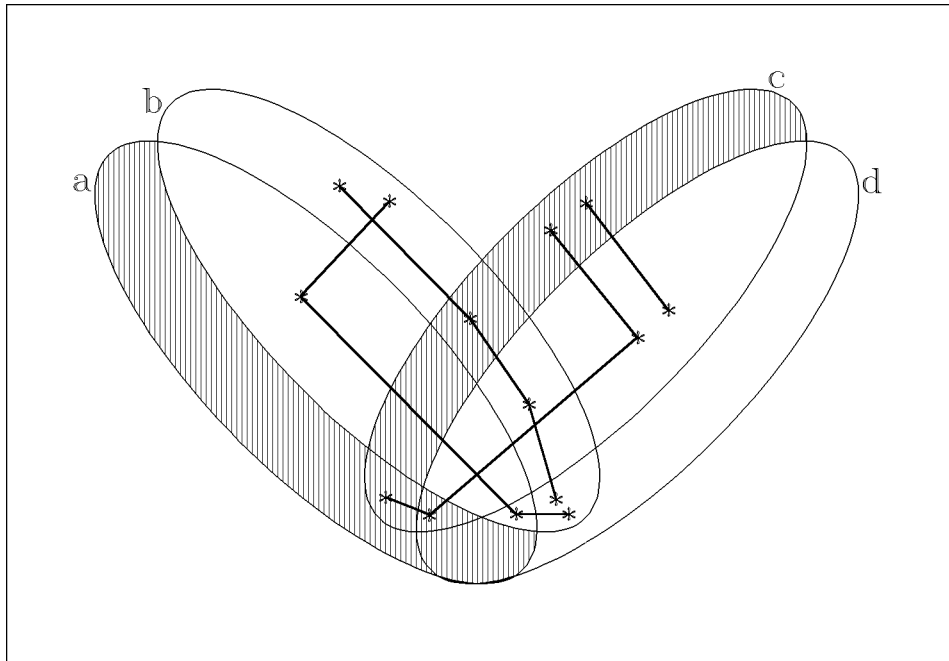
Die hier vorgestellten Verfahren bilden die Grundlage für die Möglichkeit, rein mechanisch Beweise aus den Diagrammen zu erzeugen, oder aber genau anzugeben, was minimal noch fehlt, um dafür zu sorgen, daß die vermutete Folgerung wirklich folgt.

Ein Beispiel, in dem alle oben besprochenen Fälle vorkommen:

Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

1. $a \subseteq b$
2. $b \not\subseteq a$
3. $b \sqcap c \subseteq d$
4. $b \not\subseteq c$
5. $c \not\subseteq b$
6. $c \not\subseteq a \sqcup b$
7. $c \subseteq a \sqcup d$

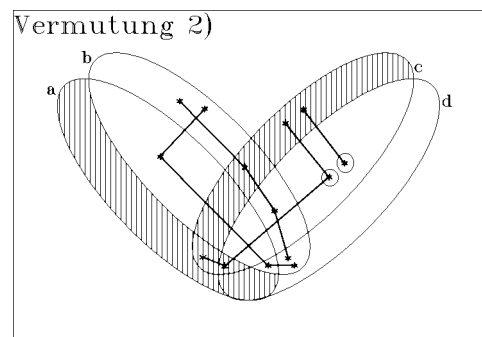
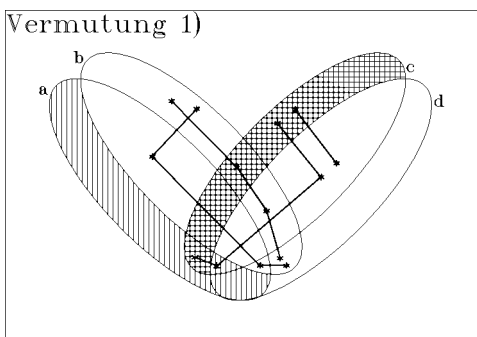
Trägt man diese Voraussetzungen in ein Venn-Diagramm ein, so ergibt sich:



Nun kann man z.B. die folgenden Vermutungen abtesten:

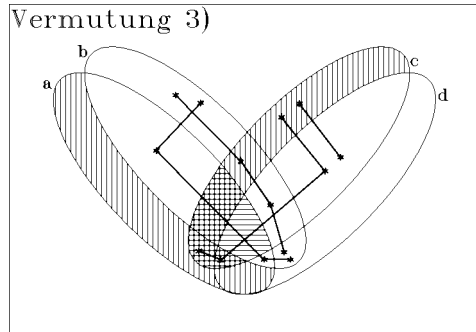
1. $c \subseteq d$
2. $d \not\subseteq b$
3. $a \subseteq \bar{c}$
4. $b \not\subseteq d$
5. $a \cap c \not\subseteq \bar{b} \cup \bar{d}$

Der Test auf FOLGEN bzw. NICHT-FOLGEN ergibt dann, wobei waagerechte Schraffur Halbordnungen andeutet und eingekreiste Sterne diese als betroffen markieren:

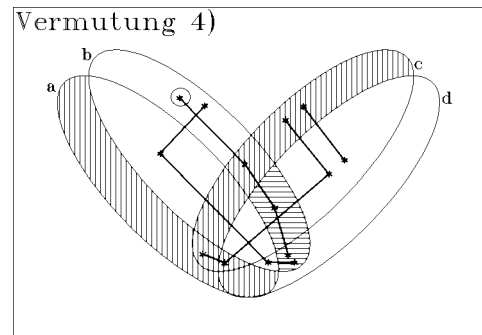
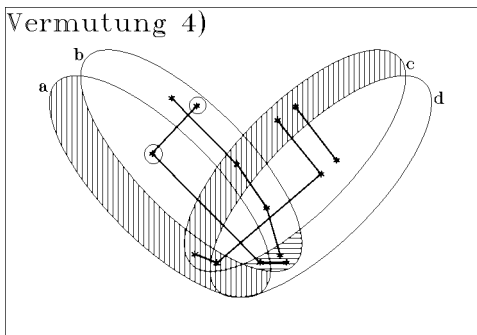


Vermutung 1) FOLGT, denn alle waagrecht schraffierten Zellen sind auch senkrecht schraffiert.

Vermutung 2) FOLGT, denn beide eingekreisten Sterne kennzeichnen jeweils eine Sternsorte, die nur in den von der Vermutung betroffenen Zellen auftritt und sonst nicht.



Vermutung 3) FOLGT NICHT, denn es sind nicht alle waagrecht schraffierten Zellen auch senkrecht schraffiert.



Vermutung 4) FOLGT NICHT, denn es gibt keine Sternsorte, die nicht auch außerhalb der durch die Vermutung betroffenen Zellen auftritt. Die waagerechte Schraffur gibt jeweils an, welche Zellen noch gestrichen sein müssten, damit die Vermutung folgt.

Vermutung 5) FOLGT NICHT, weil es überhaupt keinen Stern in den durch die Vermutung betroffenen Zellen gibt.

Wie man sieht, ist es ganz einfach die Voraussetzungen in ein Diagramm einzutragen. Durch dieses Eintragen, werden im Prinzip alle Axiome/Sätze der linearen Darstellung des Booleschen Verbandes angewendet. Man selbst muß keine Regeln anwenden. Das Prüfen ist sehr anschaulich, denn man muß nur den Zustand bestimmter Zellen betrachten, um zu einer definitiven Entscheidung zu kommen.

Kapitel 4

Beispielanwendungen

Nun betrachten wir einige Beispielanwendungen des Konzepts „Boolescher Verband“:

4.1 Die Mengenlehre

In der gesamten Mathematik, aber auch darüber hinaus, spielen die Begriffe „Element“ und „Menge“ eine große Rolle. Man schreibt $m \in X$, und liest „ m ist Element der Menge X “. Es wird angenommen, daß man für jedes Element m und jede Menge X immer entscheiden kann, ob die Beziehung $m \in X$ gilt oder nicht. In der folgenden Einführung werden wir allerdings völlig auf die Elementbeziehung zur Definition der Mengenlehre verzichten.

4.1.1 Grundlegende Definitionen

Undefinierte Beziehung zwischen zwei Objekten, sie seien Mengen genannt, ist die Teilmengenbeziehung \subseteq .

Diese Beziehung sei wie folgt definiert:

- (M1) $x \subseteq x$
- (M2) $x \subseteq y \wedge y \subseteq x \iff x = y$
- (M3) $x \subseteq y \wedge y \subseteq z \implies x \subseteq z$
- (M4) $\emptyset \subseteq x$
- (M5) $x \subseteq G$
- (M6) $x \subseteq y \wedge x \subseteq z \implies x \subseteq y \cap z$
- (M7) $x \subseteq z \wedge y \subseteq z \implies x \cup y \subseteq z$
- (M8) $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$
- (M9) $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$
- (M10) $x' \cap x = \emptyset$
- (M11) $x' \cup x = G$

x , y und z sind allgemeine Mengen, \emptyset und G sind spezielle Mengen. x' wird das Komplement der Menge x genannt und ist selbst eine Menge.

4.1.2 Mengenlehre - Boolescher Verband

Satz 4.1 Die Grundgesetze der Mengenlehre bilden einen Booleschen Verband, wenn man \subseteq mit \sqsubseteq übersetzt, sowie \cap mit \sqcap , \cup mit \sqcup , \emptyset mit 0 , G mit 1 und $'$ mit $\bar{}$.

Beweis: Es ist nachzuweisen, daß sich alle Axiome des Booleschen Verbandes aus den Grundgesetzen der Mengenlehre nach Übersetzung ableiten lassen.

(H1) entspricht nach Übersetzung (M1), (H2) entspricht nach Übersetzung (M2), (H3) entspricht nach Übersetzung (M3). Aus (H1 - H3) lassen sich (V1 - V3) ableiten, wie bereits in Abschnitt 2.1.3 gezeigt wurde.

(V4) entspricht nach Übersetzung (M8) und (M9).

Die Komplementdefinition 2.12 ist nach Übersetzung identisch mit (M10) und (M11).

Definition 2.8 entspricht nach Übersetzung der Definition des Nullobjektes (M4).

Definition 2.8 entspricht nach Übersetzung der Definition des Einsobjektes (M5).

Es muß auch noch die im Booleschen Gleichungskalkül verwendete Einsetzungs- oder auch Substitutionsregel bewiesen werden. Das ist um so schwieriger, da sie überhaupt nicht in dem Kalkül formuliert werden kann, sondern nur im logischen Hintergrundkalkül.

Dort lautet sie etwa $G, A = B \implies G'$, mit G als Gleichung in der die Variable A auftaucht und G' als Gleichung G , in der ein Vorkommen von A durch B ersetzt wurde.

Allgemein ist eine Gleichung G von der Form $T = C$, mit T ein Term, der die Variable A enthält. Ein Term ist induktiv definiert als „Jede Variable/Konstante ist ein Term, wenn A ein Term ist, dann ist \bar{A} ein Term, ist auch B ein Term, so ist $A \sqcap B$ und $A \sqcup B$ ein Term.“ Ein Beweis der Substitutionsregel kann daher z.B. induktiv erfolgen:

Induktionsanfang: Sei die Variable A ein Term. Dann ist nachzuweisen: $A = C, A = B \implies B = C$. Der Beweis ist einfach durch mehrfache Anwendung von (M2).

Induktionsschritt:

- a) $A \cup V = C, A = B \implies B \cup V = C$. Nach Voraussetzung ist B Teilmenge von A , A Teilmenge von $A \cup V$, $A \cup V$ von C . Daher ist B Teilmenge von C . Ebenso ist V Teilmenge von $A \cup V$ und $A \cup V$ ist Teilmenge von C . Daher ist V Teilmenge von C . Aus $B \subseteq C$ und $V \subseteq C$ folgt nach (M7) $B \cup V \subseteq C$. Andererseits ist A Teilmenge von B und B Teilmenge von $B \cup V$. Daher ist A Teilmenge von $B \cup V$. Außerdem ist V Teilmenge von $B \cup V$. Nach (M7) ist daher auch $A \cup V$ Teilmenge von $B \cup V$. Nach Voraussetzung ist C Teilmenge von $A \cup V$, daher ist C Teilmenge von $B \cup V$. Hieraus und aus $B \cup V \subseteq C$ folgt $B \cup V = C$.

- b) $A \cap V = C, A = B \implies B \cap V = C$. Der Beweis ist dual zu a).
- c) $A' = C, A = B \implies B' = C$. Wenn $A = B$ ist, dann ist auch $A' = B'$. Daher ist A' auch Teilmenge von B' . Mit A' Teilmenge von C folgt daher B' Teilmenge von C . Andererseits folgt aus C Teilmenge von A' und A' Teilmenge von B' das C Teilmenge von B' ist. Daher ist $B' = C$.

■

Satz 4.2 Ein Boolescher Verband ist eine Mengenalgebra, wenn man \sqsubseteq mit \subseteq übersetzt, sowie \sqcap mit \cap , \sqcup mit \cup , 0 mit \emptyset , 1 mit G und $\bar{}$ mit $'$.

Beweis: Es ist nachzuweisen, daß sich alle Grundgesetze der Mengenlehre aus den Axiomen des Booleschen Verbandes nach Übersetzung ableiten lassen.

- (M1) entspricht nach Übersetzung Axiom (H1).
 (M2) entspricht nach Übersetzung Axiom (H2).
 (M3) entspricht nach Übersetzung Axiom (H3).
 (H1 - H3) sind aus (V1 - V3) ableitbar, wie in Abschnitt 2.1.3 gezeigt wurde.
 (M4) entspricht nach Übersetzung Definition 2.8
 (M5) entspricht nach Übersetzung Definition 2.8
 (M6) entspricht nach Übersetzung Definition 2.10
 (M7) entspricht nach Übersetzung Definition 2.10
 (M8) entspricht nach Übersetzung Axiom (V4)
 (M9) entspricht nach Übersetzung Axiom (V4).
 (M10) entspricht nach Übersetzung Definition 2.12
 (M11) entspricht nach Übersetzung Definition 2.12

■

Damit ist die Äquivalenz des Booleschen Verbandes mit der Mengenalgebra bewiesen. Diese Mengenalgebra basiert allerdings nur auf der Teilmengenbeziehung, bzw. der Gleichheit, nicht auf der Elementbeziehung.

4.2 Die Begriffslogik

Die Begriffslogik hat ihre Wurzeln in der Philosophie. Als ihr geistiger Vater muß der griechische Philosoph Aristoteles angesehen werden. Im Mittelalter beschäftigte man sich ausgiebig mit Randproblemen und erst seit kurzer Zeit gibt es brauchbare Formalisierungen.

4.2.1 Eine formale Sprache

Zunächst wird eine formale Sprache der Begriffslogik eingeführt:

| | | |
|--------------|-----------------------|---------------------|
| Grundzeichen | a b c ... | Variablen |
| | A B C ... | |
| | 0 1 | Konstanten |
| | $\leq =$ | Beziehungszeichen |
| | $\bar{\quad} \cdot +$ | Verknüpfungszeichen |
| Ausdrücke | Terme | |

1. Zeichen des Alphabetes (Variablen und Konstanten), die auch (mehrfach) mit Indizes oder Exponenten (aus dem Alphabet) versehen sein dürfen.
2. Sind s und t Terme, so auch $s \cdot t$ und $s + t$; ist s ein Term, so auch \bar{s} .

Formeln

1. Zeichen des Alphabetes, die auch (mehrfach) mit Indizes oder Exponenten (aus dem Alphabet) versehen sein dürfen.
2. Sind s und t Terme, so sind $s \leq t$ und $s = t$ Formeln.
3. Sind a und b Formeln, so auch $a \leq b$, $a = b$, $a \cdot b$, $a + b$; ist a eine Formel, so auch \bar{a} .

Insbesondere gilt hierdurch, daß in der Begriffslogik z.B. Ausdrücke der Form $(a \leq b) \leq (a \leq a + b)$ erlaubt sind. \leq und $=$ werden dadurch praktisch auch zu Verknüpfungszeichen. Die eindeutige Lesbarkeit der Ausdrücke wird nötigenfalls durch Setzen von Klammern gewährleistet.

4.2.2 Eine erste Axiomatik

Es gelten die folgenden Axiome (Grundformeln und Grundregeln):

| | | | | |
|-----|--------------------|-----|--|--------------------------|
| A1 | $a \leq a$ | A6 | $\frac{a \leq b \quad b \leq c}{a \leq c}$ | |
| A2a | $a \cdot b \leq a$ | A7 | $\frac{a \leq b \quad b \leq a}{a = b}$ | |
| A2b | $a \cdot b \leq b$ | | | |
| A3a | $a \leq a + b$ | A8a | $\frac{a = b}{a \leq b}$ | A8b |
| A3b | $b \leq a + b$ | | | $\frac{a = b}{b \leq a}$ |
| A4a | $0 \leq a$ | A9 | $\frac{a \leq b \quad a \leq c}{a \leq b \cdot c}$ | |
| A4b | $a \leq 1$ | | | |

$$\text{A5a} \quad a \leq (a \cdot b) + (a \cdot \bar{b})$$

$$\text{A5b} \quad (a + b) \cdot (a + \bar{b}) \leq a$$

$$\text{A10} \quad \frac{a \leq c \quad b \leq c}{a + b \leq c}$$

Der waagerechte Strich in den Grundregeln zeigt einen Ableitungsschritt an, oberhalb des Striches stehen die Prämissen, unterhalb die Konklusion. Damit liegt ein formales System der Begriffslogik vor. Dieses System werden wir mit BL bezeichnen. Man könnte viele Sätze mit diesem Axiomensystem beweisen, ohne zu wissen, was überhaupt ein „Begriff“ ist.

4.2.3 Begriff, Inhalt, Umfang

Man kann die Logik als allgemeine Lehre vom Argumentieren, Begründen, Beweisen, kurz als Lehre vom Schließen auffassen. Schlüsse als Gegenstände der Logik bauen sich aus Urteilen (Prämissen, Konklusionen) auf, und diese wiederum bestehen unter anderem aus Begriffen. Begriffslogik hat mit den Beziehungen und Verknüpfungen von Begriffen zu tun. Mit einem Begriff kann alles repräsentiert werden, was gemeint werden kann, also Existierendes wie Nichtexistierendes, Widerspruchsvolles wie Widerspruchsfreies, Wahres wie Unwahres, Denkbare wie Undenkbare, usw.

Die in der obigen Axiomatik eingeführte Beziehung \leq zwischen zwei Begriffen wollen wir als Art-Gattungs-Beziehung bezeichnen. Dabei ist a in der Beziehung $a \leq b$ die Art und b die Gattung. Der Begriff „Hund“ etwa ist Art des Gattungsbegriffes „Lebewesen“.

Vom Inhalt eines Begriffes kann gesagt werden, daß er mindestens den Inhalt seiner Gattungen enthält, und höchstens den Inhalt seiner Arten.

Vom Umfang eines Begriffes kann gesagt werden, daß er mindestens den Umfang seiner Arten enthält, und höchstens den Umfang seiner Gattungen.

Der Inhalt eines Begriffes beschreibt die Merkmale des Begriffes, sein Umfang den Anwendungsbereich des Begriffes. Eine Art hat also mindestens soviel Inhalt wie ihre Gattung. Die Art kann aber auch mehr Inhalt haben als ihre Gattung. Je spezifischer ein Begriff wird, desto geringer wird dabei natürlich sein Umfang, also daß, worauf er zutrifft. Das ist die sogenannte Inhalts-Umfangs-Relation, je mehr Inhalt, desto weniger Umfang, und umgedreht.

Auf diese Weise entsteht eine Art Begriffsgerüst, welches die Art-Gattungsbeziehungen zwischen Begriffen darstellt. Früher nannte man dieses Gerüst die „Begriffspyramide“, eine so ebenmäßige Form hat es allerdings nicht, lediglich die grobe Orientierung stimmt. Ausgehend von einer breiten Basis sehr spezieller Begriffe verjüngt sich das Gerüst zu immer allgemeineren Begriffen, bis hin zum Begriff des „Meinbaren“, der an der Spitze steht, denn alles ist meinbar. Der Begriff „Meinbar“ ist sozusagen der inhaltsleerste Begriff. Das ist auch in der Axiomatik erkennbar, denn es gilt $a \leq 1$. Der Begriff des „Nicht-Meinbaren“ ist dagegen widersprüchlich, gibt man ihn an, so hat man ihn bereits gemeint. Ein widersprüchlicher Begriff ist sozusagen

der umfangsleerste Begriff, nur er selbst ist in seinem Umfang. Das wird in der Axiomatik durch $0 \leq a$ ausgedrückt, wodurch auch klar wird, daß es nur einen widersprüchlichen Begriff gibt, unbeschadet seiner vielen Erscheinungsformen.

Die Art-Gattungsbeziehung zwischen den Begriffen a und b kennzeichnet aber auch das Urteil „Alle a sind b “. Die bekannten vier aristotelischen Urteilsformen, welche die Bausteine der sogenannten Syllogistik (ein von Aristoteles begründeter Teil der Begriffslogik) bilden,

a-Urteil Alle A sind B

e-Urteil Kein A ist B

o-Urteil Einige A sind nicht B

i-Urteil Einige A sind B

lassen sich bisher aber nur teilweise mit der oben beschriebenen Axiomatik erfassen. Sie ist noch nicht ausreichend zur Darstellung der klassischen Logik und wird später erweitert werden. Immerhin genügt sie aber zur Darstellung des a- wie des e-Urteils und den zugehörigen Schlüssen. Das a-Urteil entspricht der Art-Gattungsbeziehung, also der Form $a \leq b$. Auch das e-Urteil „Kein A ist B“ oder auch „Alle A sind nicht-B“ kann als eine Art-Gattungsbeziehung verstanden werden, nämlich als $a \cdot b \leq 0$ oder auch als $a \leq \bar{b}$.

Die Axiome des oben beschriebenen Systems sind vor diesem Hintergrund wie folgt zu verstehen:

A1 Der Begriff „a“ ist Art des Begriffes „a“

A2 Der Begriff „a und b“ ist Art des Begriffes „a“ sowie Art des Begriffes „b“

A3 Die Begriffe „a“ und „b“ sind Arten des Begriffes „a oder b“

A4 Der widersprüchliche Begriff (0) ist Art aller Begriffe und jeder Begriff ist Art des inhaltsleersten Begriffes, des Meinbaren (1)

A5 Die Negation eines Begriffes wird definiert, indem der Begriff „a“ erklärt wird, als Art der Oder-Verknüpfung der „a“, die die Eigenschaft „b“ haben mit den „a“, die nicht die Eigenschaft „b“ haben. Die andere Richtung dieser Art-Gattungs-Beziehung ist einfach herleitbar, so daß „a“ genau der obigen Verknüpfung entspricht.

Andererseits kann man den Begriff „a“ auch beschreiben als Und-Verknüpfung der „a oder b“ mit den „a oder Nicht-b“.

A6 Ist „a“ Art von „b“ und „b“ Art von „c“, so ist „a“ Art von „c“

A7 Ist „a“ Art von „b“ und „b“ Art von „a“, so ist „a“ mit „b“ total identisch

A8 Ist „a“ total identisch mit „b“, so ist „a“ Art von „b“ und „b“ Art von „a“

A9 Ist „a“ Art von „b“ und „a“ auch Art von „c“, so ist „a“ Art von „b und c“

A10 Ist „a“ Art von „c“ und „b“ Art von „c“, so ist „a oder b“ Art von „c“

Aufgrund des sehr weit gefaßten Begriffes vom Begriff sind auch Urteile, da meinbar, durch Begriffe repräsentierbar. Dazu dienten auch die besonderen Definitionen in der formalen Sprache. Die Axiomatik enthält aber keine speziellen Regeln zur Behandlung dieser Beziehungsbegriffe. Wir werden daher diese Möglichkeit, die die Begriffslogik bietet, ja, die geradezu die Logik ausmacht, zunächst nicht nutzen, und BL typisch verbandstheoretisch, also lediglich wie den Kalkül BV^{\square} interpretieren. Diesen, in seiner formalen Sprache reduzierten Kalkül wollen wir BV^{\leq} nennen.

Das aristotelische i- und o-Urteil lassen sich mit der obigen Axiomatik für BL zunächst nicht erfassen, denn das o-Urteil ist die Negation des a-Urteils und das i-Urteil ist die Negation des e-Urteils. Für die Negation von Urteilen gibt es in BL keine Axiome.

Diese vorgelegte Axiomatik zielt aber zunächst nur auf die Beziehung „Begriffslogik - Boolescher Verband“, in einer Erweiterung wird die Behandlung der restlichen Urteile ebenfalls möglich sein.

Andererseits zeigte die Betrachtung der Venn-Diagramme, daß es noch weitere Unterordnungen gibt, die in dieser Form nicht so einfach, d.h. ohne negierte Begriffe und einheitliche Begriffsfolge, von den aristotelischen Urteilsformen abgedeckt werden, nämlich $\bar{a} \leq b$ und $\bar{a} \leq \bar{b}$, bzw. deren Negationen. In neuerer Zeit wurde daher die aristotelische Urteilssystematik erweitert, z.B. in [6]:

ä-Urteil Alles an A ist an B (Alle B sind A)

ë-Urteil Alles an A ist nicht an B

ö-Urteil Etwas an A ist nicht an B (Einige B sind nicht A)

ï-Urteil Etwas an A ist an B

ä- und ö-Urteil sind dabei noch gut zu fassen, denn sie lassen sich relativ einfach in a- bzw. o-Urteile umformen. Das ë-Urteil drückt dagegen aus, daß die Begriffe A und B keinen gemeinsamen Inhalt haben (mit der Ausnahme, daß beide meinbar sind), was man mit einer nahezu totalen Unähnlichkeit übersetzen könnte. Das ï-Urteil bedeutet dagegen, daß die Begriffe A und B über die Meinbarkeit hinaus gemeinsamen Inhalt haben, sich also in einem abstrakten Sinne ähnlich sind.

4.2.4 Hilfssätze

Nun werden einige später nützliche Hilfssätze bewiesen. Diese Beweise liegen sämtlich in der sogenannten *Baumform* vor. Die Baumform ist wie folgt definiert: An der Wurzel liegt die Konklusion, an den Blättern

die Prämissen oder aber Grundformeln. Dazwischen sind einzelne Ableitungsschritte von den Blättern zu der Wurzel hin durch einen waagerechten Strich gekennzeichnet, der die Anwendung einer Grundregel oder aber einer abgeleiteten (vorher bewiesenen) Regel anzeigt. Dabei ist die Reihenfolge der Prämissen unerheblich, ebenso ist eine beliebige Vervielfachung der Prämissen und Grundformeln möglich. Diese Darstellungsform erlaubt eine sehr anschauliche Darlegung der einzelnen Beweisschritte.

Um auch in der linearen Darstellung einen Ableitungszusammenhang kennzeichnen zu können, wird das Zeichen \vdash eingeführt, wobei $a \vdash b$ bedeutet, daß aus a b abgeleitet werden kann. \dashv kennzeichnet dementsprechend einen Ableitungszusammenhang in der umgedrehten Richtung.

Satz 4.3 (Transportationsregel von Peirce) *Es gilt:*

$$(a) \ a \leq b + c \dashv \vdash a \cdot \bar{b} \leq c$$

$$(b) \ a \leq \bar{b} + c \dashv \vdash a \cdot b \leq c$$

Beweis:

(a)

$$\frac{\frac{\frac{A2}{a \cdot \bar{b} \leq a} \quad \frac{A3}{a \leq b + c}}{a \cdot \bar{b} \leq b + c} \quad A6 \quad \frac{\frac{A3}{b \leq c + b} \quad \frac{A3}{c \leq c + b}}{b + c \leq c + b} \quad A10}{\frac{a \cdot \bar{b} \leq c + b}{a \cdot \bar{b} \leq c + b}} \quad A6 \quad \frac{\frac{A2}{a \cdot \bar{b} \leq \bar{b}} \quad \frac{A3}{\bar{b} \leq c + \bar{b}}}{a \cdot \bar{b} \leq c + \bar{b}} \quad A6}{\frac{a \cdot \bar{b} \leq (c + b) \cdot (c + \bar{b})}{a \cdot \bar{b} \leq c} \quad A9} \quad \frac{(c + b) \cdot (c + \bar{b}) \leq c}{a \cdot \bar{b} \leq c} \quad A5 \quad A6$$

$$\frac{\frac{A5}{a \leq (a \cdot b) + (a \cdot \bar{b})} \quad \frac{\frac{A2}{a \cdot b \leq b} \quad \frac{A3}{b \leq \bar{b} + c}}{a \cdot b \leq b + c} \quad A6 \quad \frac{\frac{A3}{a \cdot \bar{b} \leq c} \quad \frac{A3}{c \leq \bar{b} + c}}{a \cdot \bar{b} \leq \bar{b} + c} \quad A6}{\frac{(a \cdot b) + (a \cdot \bar{b}) \leq b + c}{a \leq b + c} \quad A10} \quad A6$$

(b)

$$\frac{\frac{\frac{A2}{a \cdot b \leq b} \quad \frac{A3}{b \leq c + b}}{a \cdot b \leq c + b} \quad A6 \quad \frac{\frac{A2}{a \cdot b \leq a} \quad \frac{A3}{a \leq \bar{b} + c}}{a \cdot b \leq \bar{b} + c} \quad A6 \quad \frac{\frac{A3}{\bar{b} \leq c + \bar{b}} \quad \frac{A3}{c \leq c + \bar{b}}}{\bar{b} + c \leq c + \bar{b}} \quad A10}{\frac{a \cdot b \leq c + \bar{b}}{a \cdot b \leq c + \bar{b}} \quad A9} \quad \frac{a \cdot b \leq (c + b) \cdot (c + \bar{b})}{a \cdot b \leq c} \quad A5 \quad A6$$

$$\frac{\frac{A5}{a \leq (a \cdot b) + (a \cdot \bar{b})} \quad \frac{\frac{A3}{a \cdot b \leq c} \quad \frac{A3}{c \leq \bar{b} + c}}{a \cdot b \leq \bar{b} + c} \quad A6 \quad \frac{\frac{A2}{a \cdot \bar{b} \leq \bar{b}} \quad \frac{A3}{\bar{b} \leq \bar{b} + c}}{a \cdot \bar{b} \leq \bar{b} + c} \quad A6}{\frac{(a \cdot b) + (a \cdot \bar{b}) \leq \bar{b} + c}{a \leq \bar{b} + c} \quad A10} \quad A6$$

■

Satz 4.4 *Es gilt:*

- (a) $a + 0 = a$
- (b) $a \cdot 0 = 0$
- (c) $a \cdot 1 = a$
- (d) $a + 1 = 1$

Beweis:

(a)

$$\frac{\frac{A1}{a \leq a} \quad \frac{A4}{0 \leq a}}{a + 0 \leq a} \quad A10 \quad \frac{A3}{a \leq a + 0}}{a + 0 = a} \quad A7$$

(b)

$$\frac{\frac{A2}{a \cdot 0 \leq 0} \quad \frac{A4}{0 \leq a \cdot 0}}{a \cdot 0 = 0} \quad A7$$

(c)

$$\frac{\frac{A1}{a \leq a} \quad \frac{A4}{a \leq 1}}{a \leq a \cdot 1} \quad A9 \quad \frac{A2}{a \cdot 1 \leq a}}{a \cdot 1 = a} \quad A7$$

(d)

$$\frac{\frac{A4}{a + 1 \leq 1} \quad \frac{A3}{1 \leq a + 1}}{a + 1 = 1} \quad A7$$

■

Satz 4.5 *Es gilt:*

- (a) $a \leq b \dashv\vdash a \cdot \bar{b} \leq 0$
- (b) $a \leq \bar{b} \dashv\vdash a \cdot b \leq 0$
- (c) $a \leq b \dashv\vdash 1 \leq \bar{a} + b$
- (d) $\bar{a} \leq b \dashv\vdash 1 \leq a + b$

Beweis:

(a)

$$\frac{\frac{a \leq b}{a \leq b} \quad \frac{A3}{b \leq b + 0}}{a \leq b + 0} \quad A6$$

$$\frac{a \leq b + 0}{a \cdot \bar{b} \leq 0} \quad \text{Satz 4.3}$$

$$\frac{\frac{a \cdot \bar{b} \leq 0}{a \leq b + 0} \quad \text{Satz 4.3} \quad \frac{\text{Satz 4.4}}{b + 0 = 0}}{b + 0 \leq b} \quad A8$$

$$\frac{a \leq b + 0}{a \leq b} \quad A6$$

(b)

$$\frac{\frac{a \leq \bar{b} \quad \bar{b} \leq \bar{b} + 0}{a \leq \bar{b} + 0} \text{ A6}}{\frac{a \cdot b \leq 0}{a \cdot b \leq 0} \text{ Satz 4.3}} \text{ Satz 4.3}$$

$$\frac{\frac{a \cdot b \leq 0}{a \leq \bar{b} + 0} \text{ Satz 4.3} \quad \frac{\bar{b} + 0 = 0}{\bar{b} + 0 \leq \bar{b}} \text{ A8}}{a \leq \bar{b}} \text{ A6}$$

(c)

$$\frac{\frac{1 \cdot a \leq a \quad a \leq b}{1 \cdot a \leq b} \text{ A6}}{1 \leq \bar{a} + b} \text{ Satz 4.3}$$

$$\frac{\frac{\frac{a \cdot 1 \leq 1 \quad a \cdot 1 \leq a}{a \cdot 1 \leq 1 \cdot a} \text{ A4 A9} \quad \frac{1 \leq \bar{a} + b}{1 \cdot a \leq b} \text{ Satz 4.3}}{a \cdot 1 \leq b} \text{ A6}}{\frac{a \cdot 1 = a}{a \leq a \cdot 1} \text{ A8}} \text{ A6}$$

$$a \leq b$$

(d)

$$\frac{\frac{1 \cdot \bar{a} \leq \bar{a} \quad \bar{a} \leq b}{1 \cdot \bar{a} \leq b} \text{ A6}}{1 \leq a + b} \text{ Satz 4.3}$$

$$\frac{\frac{\frac{\bar{a} \cdot 1 \leq 1 \quad \bar{a} \cdot 1 \leq \bar{a}}{\bar{a} \cdot 1 \leq 1 \cdot \bar{a}} \text{ A4 A9} \quad \frac{1 \leq a + b}{1 \cdot \bar{a} \leq b} \text{ Satz 4.3}}{\bar{a} \cdot 1 \leq b} \text{ A6}}{\frac{\bar{a} \cdot 1 = \bar{a}}{\bar{a} \leq \bar{a} \cdot 1} \text{ A8}} \text{ A6}$$

$$\bar{a} \leq b$$

■

Satz 4.6 *Es gilt:*

- (a) $a \cdot \bar{a} \leq 0$
- (b) $1 \leq a + \bar{a}$

Beweis:

(a)

$$\frac{a \leq a + 0}{a \cdot \bar{a} \leq 0} \text{ Satz 4.5}$$

(b)

$$\frac{1 \cdot a \leq a}{1 \leq a + \bar{a}} \text{ Satz 4.5}$$

Satz 4.7 (Doppelte Negation) *Es gilt:*

$$a = \overline{\overline{a}}$$

Beweis:

$$\frac{\frac{\overset{A1}{a \leq a}}{a \cdot \overline{\overline{a}} \leq 0} \text{ Satz 4.5(a)} \quad \frac{\overset{A1}{a \leq a}}{1 \leq \overline{\overline{a}} + a} \text{ Satz 4.5(c)}}{\frac{a \leq \overline{\overline{a}}}{\overline{\overline{a}} \leq a} \text{ Satz 4.5(b)} \quad \frac{1 \leq \overline{\overline{a}} + a}{\overline{\overline{a}} \leq a} \text{ Satz 4.5(d)}}{a = \overline{\overline{a}}} \text{ A7}$$

Satz 4.8 (Kommutativität) *Es gilt:*

(a) $a + b = b + a$

(b) $a \cdot b = b \cdot a$

Beweis:

(a)

$$\frac{\frac{\overset{A3}{a \leq b + a} \quad \overset{A3}{b \leq b + a}}{a + b \leq b + a} \text{ A10} \quad \frac{\overset{A3}{b \leq a + b} \quad \overset{A3}{a \leq a + b}}{b + a \leq a + b} \text{ A10}}{a + b = b + a} \text{ A7}$$

(b)

$$\frac{\frac{\overset{A2}{a \cdot b \leq b} \quad \overset{A2}{a \cdot b \leq a}}{a \cdot b \leq b \cdot a} \text{ A9} \quad \frac{\overset{A2}{b \cdot a \leq a} \quad \overset{A2}{b \cdot a \leq b}}{b \cdot a \leq a \cdot b} \text{ A9}}{a \cdot b = b \cdot a} \text{ A7}$$

Satz 4.9 *Es gilt:*

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b$$

Beweis:

$$\frac{\overset{A2}{a \cdot b \cdot c \leq a} \quad \frac{\overset{A2}{a \cdot b \cdot c \leq c} \quad \frac{\overset{A2}{a \cdot b \cdot c \leq b \cdot c} \quad \overset{A2}{b \cdot c \leq b}}{a \cdot b \cdot c \leq b} \text{ A6}}{a \cdot b \cdot c \leq c \cdot b} \text{ A9}}{a \cdot b \cdot c \leq a \cdot c \cdot b} \text{ A9}$$

$$\frac{\overset{A2}{a \cdot c \cdot b \leq a} \quad \frac{\overset{A2}{a \cdot c \cdot b \leq b} \quad \frac{\overset{A2}{a \cdot c \cdot b \leq c \cdot b} \quad \overset{A2}{c \cdot b \leq c}}{a \cdot c \cdot b \leq c} \text{ A6}}{a \cdot c \cdot b \leq b \cdot c} \text{ A9}}{a \cdot c \cdot b \leq a \cdot b \cdot c} \text{ A9}$$

Satz 4.10 (Kontraposition) *Es gilt:*

$$a \leq b \dashv\vdash \bar{b} \leq \bar{a}$$

Beweis:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Satz 4.8(b)} \\ \bar{b} \cdot a = a \cdot \bar{b} \\ \bar{b} \cdot a \leq a \cdot \bar{b} \end{array} \text{ A8} \quad \frac{a \leq b}{a \cdot \bar{b} \leq 0} \text{ Satz 4.5(a)}}{\frac{\bar{b} \cdot a \leq 0}{\bar{b} \leq \bar{a}} \text{ Satz 4.5(b)}} \text{ A6}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Satz 4.8(b)} \\ a \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot a \\ a \cdot \bar{b} \leq \bar{b} \cdot a \end{array} \text{ A8} \quad \frac{\bar{b} \leq \bar{a}}{\bar{b} \cdot a \leq 0} \text{ Satz 4.5(b)}}{\frac{a \cdot \bar{b} \leq 0}{a \leq b} \text{ Satz 4.5(a)}} \text{ A6}$$

■

Satz 4.11 *Es gilt:*

(a) $a \cdot b \leq c \dashv\vdash a \cdot \bar{c} \leq \bar{b}$

(b) $a \leq b + c \dashv\vdash \bar{c} \leq b + \bar{a}$

Beweis:

(a)

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Satz 4.9} \\ a \cdot \bar{c} \cdot b = a \cdot b \cdot \bar{c} \\ a \cdot \bar{c} \cdot b \leq a \cdot b \cdot \bar{c} \end{array} \text{ A8} \quad \frac{a \cdot b \leq c}{a \cdot b \cdot \bar{c} \leq 0} \text{ Satz 4.5(a)}}{\frac{a \cdot \bar{c} \cdot b \leq 0}{a \cdot \bar{c} \leq \bar{b}} \text{ Satz 4.5(b)}} \text{ A6}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Satz 4.9} \\ a \cdot b \cdot \bar{c} = a \cdot \bar{c} \cdot b \\ a \cdot b \cdot \bar{c} \leq a \cdot \bar{c} \cdot b \end{array} \text{ A8} \quad \frac{a \cdot \bar{c} \leq \bar{b}}{a \cdot \bar{c} \cdot b \leq 0} \text{ Satz 4.5(b)}}{\frac{a \cdot b \cdot \bar{c} \leq 0}{a \cdot b \leq c} \text{ Satz 4.5(a)}} \text{ A6}$$

(b)

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Satz 4.8(b)} \\ \bar{c} \cdot a = a \cdot \bar{c} \\ \bar{c} \cdot a \leq a \cdot \bar{c} \end{array} \text{ A8} \quad \frac{\begin{array}{l} \text{Satz 4.8(a)} \\ b + c = c + b \\ b + c \leq c + b \end{array} \text{ A8}}{\frac{a \leq c + b}{a \cdot \bar{c} \leq b} \text{ Satz 4.3}} \text{ A6}}{\frac{\bar{c} \cdot a \leq b}{\bar{c} \leq \bar{a} + b} \text{ Satz 4.3} \quad \frac{\text{Satz 4.8(a)}}{\bar{a} + b \leq b + \bar{a}} \text{ A6}}{\bar{c} \leq b + \bar{a}} \text{ A6}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Satz 4.8(a)} \\
 \frac{b + \bar{a} = \bar{a} + b}{b + \bar{a} \leq \bar{a} + b} \text{ A8} \\
 \text{Satz 4.8(b)} \quad \frac{\bar{c} \leq b + \bar{a}}{\bar{c} \leq \bar{a} + b} \text{ A6} \\
 \frac{a \cdot \bar{c} = \bar{c} \cdot a}{a \cdot \bar{c} \leq \bar{c} \cdot a} \text{ A8} \quad \frac{\bar{c} \leq \bar{a} + b}{\bar{c} \cdot a \leq b} \text{ Satz 4.3} \\
 \frac{a \cdot \bar{c} \leq b}{a \leq c + b} \text{ Satz 4.3} \quad \frac{\text{Satz 4.8(a)} \quad c + b \leq b + c}{a \leq b + c} \text{ A6}
 \end{array}$$

■

Satz 4.12 (De Morgan) *Es gilt:*

- (a) $\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$
- (b) $\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

Beweis:

(a)

$$\begin{array}{c}
 \frac{a \leq a + b}{a + b \leq \bar{a}} \text{ Satz 4.10} \quad \frac{b \leq a + b}{a + b \leq \bar{b}} \text{ Satz 4.10} \\
 \frac{a + b \leq \bar{a}}{a + b \leq \bar{a} \cdot \bar{b}} \text{ A9} \\
 \\
 \frac{\text{Satz 4.7} \quad a = \bar{\bar{a}}}{a \leq \bar{\bar{a}}} \text{ A8} \quad \frac{\text{A2} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} \leq \bar{a}}{\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{\bar{a} \cdot \bar{b}}}} \text{ Satz 4.10} \quad \frac{\text{Satz 4.7} \quad b = \bar{\bar{b}}}{b \leq \bar{\bar{b}}} \text{ A8} \quad \frac{\text{A2} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} \leq \bar{b}}{\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{\bar{a} \cdot \bar{b}}}} \text{ Satz 4.10} \\
 \frac{a \leq \bar{\bar{a}}}{a \leq \bar{\bar{\bar{a} \cdot \bar{b}}}} \text{ A6} \quad \frac{b \leq \bar{\bar{b}}}{b \leq \bar{\bar{\bar{a} \cdot \bar{b}}}} \text{ A6} \\
 \frac{\text{Satz 4.7} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{\bar{\bar{a} \cdot \bar{b}}}}{\bar{a} \cdot \bar{b} \leq \bar{\bar{\bar{a} \cdot \bar{b}}}} \text{ A8} \quad \frac{a + b \leq \bar{\bar{\bar{a} \cdot \bar{b}}}}{\bar{\bar{\bar{a} \cdot \bar{b}}} \leq a + b} \text{ Satz 4.10} \\
 \frac{\bar{a} \cdot \bar{b} \leq \bar{\bar{\bar{a} \cdot \bar{b}}}}{\bar{a} \cdot \bar{b} \leq a + b} \text{ A6}
 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\text{A3} \quad \bar{a} \leq \bar{a} + \bar{b}}{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq \bar{\bar{a}}} \text{ Satz 4.10} \quad \frac{\text{Satz 4.7} \quad a = \bar{\bar{a}}}{\bar{\bar{a}} \leq a} \text{ A8} \quad \frac{\text{A3} \quad \bar{b} \leq \bar{a} + \bar{b}}{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq \bar{\bar{b}}} \text{ Satz 4.10} \quad \frac{\text{Satz 4.7} \quad b = \bar{\bar{b}}}{\bar{\bar{b}} \leq b} \text{ A6} \\
 \frac{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq \bar{\bar{a}}}{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq a} \text{ A9} \quad \frac{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq \bar{\bar{b}}}{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq b} \text{ A9} \\
 \frac{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq a}{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq a \cdot b} \text{ Satz 4.10} \quad \frac{\text{Satz 4.7} \quad \bar{\bar{a} + \bar{b}} = \bar{\bar{\bar{a} + \bar{b}}}}{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq \bar{\bar{\bar{a} + \bar{b}}}} \text{ A8} \\
 \frac{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq a \cdot b}{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq \bar{\bar{\bar{a} + \bar{b}}}} \text{ A6} \\
 \frac{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq \bar{\bar{\bar{a} + \bar{b}}}}{a \cdot b \leq \bar{\bar{\bar{a} + \bar{b}}}} \text{ A6} \\
 \\
 \frac{\text{A2} \quad a \cdot b \leq a}{\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{a \cdot b}}} \text{ Satz 4.10} \quad \frac{\text{A2} \quad a \cdot b \leq b}{\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{a \cdot b}}} \text{ Satz 4.10} \\
 \frac{\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{a \cdot b}}}{\bar{\bar{a} + \bar{b}} \leq \bar{\bar{a \cdot b}}} \text{ A10}
 \end{array}$$

■

4.2.5 Begriffslogik - Boolescher Verband

Satz 4.13 Die vorgelegte begriffslogische Axiomatik ist ein Boolescher Verband, wenn man \leq mit \sqsubseteq übersetzt, sowie \cdot mit \sqcap , $+$ mit \sqcup , 0 mit 0 , 1 mit 1 und $\bar{}$ mit $\bar{}$.

Beweis: Es ist nachzuweisen, daß sich alle Axiome des Booleschen Verbandes aus den Axiomen der Begriffslogik nach Übersetzung ableiten lassen.

(V1a)

$$\frac{\frac{a \leq a+b \quad a+b \leq (a+b)+c}{a \leq (a+b)+c} A6 \quad \frac{\frac{b \leq a+b \quad a+b \leq (a+b)+c}{b \leq (a+b)+c} A6 \quad c \leq (a+b)+c}{b+c \leq (a+b)+c} A10}{a+(b+c) \leq (a+b)+c} A10$$

$$\frac{\frac{a \leq a+(b+c) \quad \frac{b \leq b+c \quad b+c \leq a+(b+c)}{b \leq a+(b+c)} A6}{a+b \leq a+(b+c)} A10 \quad \frac{c \leq b+c \quad b+c \leq a+(b+c)}{c \leq a+(b+c)} A6}{(a+b)+c \leq a+(b+c)} A10$$

(V1b)

$$\frac{\frac{a \cdot (b \cdot c) \leq a \quad \frac{a \cdot (b \cdot c) \leq a \cdot b \quad a \cdot b \leq b}{a \cdot (b \cdot c) \leq a \cdot b} A9}{a \cdot (b \cdot c) \leq a} A2 \quad \frac{a \cdot (b \cdot c) \leq b \cdot c \quad b \cdot c \leq c}{a \cdot (b \cdot c) \leq c} A6}{a \cdot (b \cdot c) \leq (a \cdot b) \cdot c} A9$$

$$\frac{\frac{(a \cdot b) \cdot c \leq a \cdot b \quad a \cdot b \leq a}{(a \cdot b) \cdot c \leq a} A6 \quad \frac{(a \cdot b) \cdot c \leq a \cdot b \quad a \cdot b \leq b}{(a \cdot b) \cdot c \leq b} A6 \quad (a \cdot b) \cdot c \leq c}{(a \cdot b) \cdot c \leq b \cdot c} A9}{(a \cdot b) \cdot c \leq a \cdot (b \cdot c)} A9$$

(V2a)

Bereits durch Satz 4.8 bewiesen.

(V2b)

Bereits durch Satz 4.8 bewiesen.

(V3a)

$$\frac{a \cdot (a+b) \leq a \quad \frac{a \leq a \quad a \leq a+b}{a \leq a \cdot (a+b)} A9}{a = a \cdot (a+b)} A7$$

(V3b)

$$\frac{\frac{A1}{a \leq a} \quad \frac{A2}{a \cdot b \leq a}}{a + (a \cdot b) \leq a} \quad A10 \quad \frac{A3}{a \leq a + (a \cdot b)} \quad A7$$

$$a = a + (a \cdot b)$$

(V4a)

$$\frac{\frac{A3}{a \cdot b \leq (a \cdot b) + (a \cdot c)} \quad \text{Satz 4.11} \quad \frac{A3}{a \cdot c \leq (a \cdot b) + (a \cdot c)} \quad \text{Satz 4.11} \quad \frac{\text{Satz 4.12}}{\bar{b} \cdot \bar{c} = \overline{b+c}} \quad A8}{\frac{a \cdot (a \cdot b) + (a \cdot c) \leq \bar{b}}{a \cdot (a \cdot b) + (a \cdot c) \leq \bar{b} \cdot \bar{c}} \quad A9 \quad \frac{\bar{b} \cdot \bar{c} \leq \overline{b+c}}{\bar{b} \cdot \bar{c} \leq \overline{b+c}} \quad A6}$$

$$\frac{a \cdot (a \cdot b) + (a \cdot c) \leq \bar{b} \cdot \bar{c}}{a \cdot (a \cdot b) + (a \cdot c) \leq \overline{b+c}} \quad \text{Satz 4.11}$$

$$\frac{a \cdot (b+c) \leq (a \cdot b) + (a \cdot c)}{a \cdot (b+c) \leq (a \cdot b) + (a \cdot c)} \quad \text{Satz 4.11}$$

$$\frac{\frac{A2}{a \cdot b \leq a} \quad \frac{A2}{a \cdot c \leq a} \quad A10 \quad \frac{A2}{a \cdot b \leq b+c} \quad \frac{A3}{b \leq b+c} \quad A6 \quad \frac{A2}{a \cdot c \leq c} \quad \frac{A3}{c \leq b+c} \quad A6}{\frac{(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq a}{(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq (b+c)} \quad A9 \quad \frac{(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq (b+c)}{(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq (b+c)} \quad A10}$$

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) \leq a \cdot (b+c)$$

(V4b)

$$\frac{\frac{A3}{a \leq a+b} \quad \frac{A3}{a \leq a+c} \quad A9 \quad \frac{A2}{b \cdot c \leq b} \quad \frac{A3}{b \leq a+b} \quad A6 \quad \frac{A2}{b \cdot c \leq c} \quad \frac{A3}{c \leq a+c} \quad A6}{\frac{a \leq (a+b) \cdot (a+c)}{b \cdot c \leq (a+b) \cdot (a+c)} \quad A9 \quad \frac{b \cdot c \leq (a+b) \cdot (a+c)}{b \cdot c \leq (a+b) \cdot (a+c)} \quad A9}$$

$$a + (b \cdot c) \leq (a+b) \cdot (a+c)$$

$$\frac{\frac{\text{Satz 4.12}}{\bar{b} \cdot \bar{c} = \overline{b+c}} \quad A8 \quad \frac{A2}{(a+b) \cdot (a+c) \leq a+b} \quad \text{Satz 4.11} \quad \frac{A2}{(a+b) \cdot (a+c) \leq a+c} \quad \text{Satz 4.11}}{\frac{\bar{b} \leq a + \overline{(a+b) \cdot (a+c)}}{\bar{b} + \bar{c} \leq a + \overline{(a+b) \cdot (a+c)}} \quad A10 \quad \frac{\bar{c} \leq a + \overline{(a+b) \cdot (a+c)}}{\bar{b} + \bar{c} \leq a + \overline{(a+b) \cdot (a+c)}} \quad A10}$$

$$\frac{\bar{b} \cdot \bar{c} \leq \overline{b+c}}{\bar{b} + \bar{c} \leq a + \overline{(a+b) \cdot (a+c)}} \quad A6$$

$$\frac{\bar{b} \cdot \bar{c} \leq a + \overline{(a+b) \cdot (a+c)}}{(a+b) \cdot (a+c) \leq a + (b \cdot c)} \quad \text{Satz 4.11}$$

Die begriffslogische 0 ist ein Nullobjekt eines Verbandes, denn sie erfüllt nach Übersetzung gemäß Satz 4.4 dessen Definition.

Die begriffslogische 1 ist ein Einsobjekt eines Verbandes, denn sie erfüllt nach Übersetzung gemäß Satz 4.4 dessen Definition.

Die eindeutige begriffslogische Negatoperation erfüllt mit Satz 4.6 die Komplement-Definition der Verbandstheorie.

Auch hier muß wieder die Substitutionsregel des Booleschen Gleichungskalküls bewiesen werden. Der Beweis ist jedoch (nach Übersetzung) identisch mit dem Beweis aus Satz 4.1, deshalb soll er hier entfallen. Das gilt allerdings nur für den Kalkül BV^{\leq} , nicht für BL, denn dann müßte die Substitutionsregel auch noch für die „Verknüpfungszeichen“ „ \leq “ bzw. „ $=$ “ bewiesen werden, wofür die vorgelegte Axiomatik aber keine Möglichkeiten bietet.

■

Satz 4.14 *Ein Boolescher Verband ist eine Begriffslogik, wenn man \sqsubseteq mit \leq übersetzt, sowie \sqcap mit \cdot , \sqcup mit $+$, 0 mit 0 , 1 mit 1 und $\bar{}$ mit $\bar{}$.*

Beweis: Es ist nachzuweisen, daß sich alle Axiome der Begriffslogik aus den Axiomen des Booleschen Verbandes nach Übersetzung ableiten lassen.

Grundformel (A1) entspricht nach Übersetzung Axiom (H1).

Die Grundformeln in (A2) und (A3) sind nach Übersetzung durch Definition 2.9 abgedeckt.

Die Grundformeln in (A4) sind nach Übersetzung durch Definition 2.8 abgedeckt.

Die Grundformeln in (A5) sind nach Übersetzung durch Satz 2.25 bewiesen.

Die Grundregel (A6) entspricht nach Übersetzung Axiom (H3).

Die Grundregel (A7) ist nach Übersetzung durch Satz 2.16 bewiesen.

Die Grundregeln in (A8) sind nach Übersetzung durch Satz 2.16 bewiesen.

Die Grundregeln in (A9) und (A10) sind nach Übersetzung durch Satz 2.10 bewiesen. ■

Die Beziehung \leq (auch Unterordnung genannt) ist also eine Halbordnung im Sinne des Booleschen Halbordnungskalküls (H1-H6).

Es hat sich aber auch gezeigt, daß die Axiome (H4) und (H6) durch die schwächeren Axiome A5a und A5b ersetzt werden können und trotzdem noch die Distributivität gewährleistet bleibt. Diese Axiome bilden aber nicht die einzige Möglichkeit, (H4) und (H6) zu ersetzen. Bezüglich des Unterordnungskalküls sind z.B. die Regeln

$$a \leq b \dashv\vdash a \cdot \bar{b} \leq 0 \text{ und } a \leq \bar{b} \dashv\vdash a \cdot b \leq 0$$

oder auch die Regeln

$$a \leq b \vdash a \cdot \bar{b} \leq 0, a \cdot b \leq 0 \vdash a \leq \bar{b}, a \leq b \vdash 1 \leq \bar{a} + b \text{ und } 1 \leq a + b \vdash \bar{a} \leq b$$

mit den Axiomen A5 äquivalent.

4.2.6 Eine erweiterte Begriffslogik

Der bisher eingeführten begriffslogischen Axiomatik fehlen die partikulären Beziehungen, d.h. die Negationen der universellen Beziehungen. Die Negation der Art-Gattungsbeziehung entspricht dem klassischen aristotelischen o-Urteil, daß i-Urteil kann geschrieben werden als $a \not\leq \bar{b}$ bzw. $a \cdot b \not\leq 0$. Zur Darstellung der klassischen Begriffslogik ist also mehr notwendig als die pure Art-Gattungsbeziehung.

Auch mit den Venn-Diagrammen kann man die negierte Unterordnung beherrschen, d.h. es besteht in dieser Hinsicht durchaus Handlungsbedarf für die bisherige begriffslogische Axiomatik. Eine Möglichkeit wäre, das

Axiomensystem um Regeln für die Negation der Unterordnung zu erweitern. Die entsprechenden Regeln würden nach dem Verfahren der sogenannten „inkonsistenten Triade“, bzw. der Kontraposition entwickelt werden, welches einer zweimaligen Anwendung der Peirce-Regel entspricht. Dabei wird die negierte Konklusion zur Prämisse und eine der Prämissen wird negiert zur Konklusion. Eine Anwendung auf die Grundregeln A6 bis A10 ergibt

$$\text{-A6- } a \leq b, a \not\leq c \vdash b \not\leq c$$

$$\text{-A6- } b \leq c, a \not\leq c \vdash a \not\leq b$$

$$\text{-A7- } a \leq b, a \neq b \vdash b \not\leq a$$

$$\text{-A7- } b \leq a, a \neq b \vdash a \not\leq b$$

$$\text{-A8- } a \not\leq b \vdash a \neq b$$

$$\text{-A8- } b \not\leq a \vdash a \neq b$$

$$\text{-A9- } a \leq b, a \not\leq b \cdot c \vdash a \not\leq c$$

$$\text{-A9- } a \leq c, a \not\leq b \cdot c \vdash a \not\leq b$$

$$\text{-A10- } a \leq c, a + b \not\leq c \vdash b \not\leq c$$

$$\text{-A10- } b \leq c, a + b \not\leq c \vdash a \not\leq c$$

und erzeugt einen Kalkül, den wir $BV^{\leq, \not\leq}$ oder $BL^{\leq, \not\leq}$ nennen wollen, je nach Interpretation der formalen Sprache.

Die Gültigkeit dieser Regeln in Venn-Diagrammen kann man einfach beweisen, indem man die Prämissen in die Diagramme einträgt, und dann feststellt, daß die Konklusionen jeweils folgen.

Es gibt jedoch noch eine andere Möglichkeit, die negierten Unterordnungen zu erhalten. Diese Möglichkeit wird repräsentiert durch zwei spezielle Regeln, die Deduktions- A11 und die Abtrennungsregel A12 in jeweils zweifacher Ausfertigung. Diese Regeln stellen eine Verbindung zwischen der Unterordnung „ \leq “ und der Ableitbarkeit „ \vdash “ her:

$$\begin{array}{l}
 \text{A11} \quad \left(\frac{(A_1) \quad (A_2) \quad \dots \quad (A_n)}{B} \right) \qquad \frac{A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B}{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \leq B} \\
 \text{A12} \quad \frac{A_1, A_2, \dots, A_n \quad A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \leq B}{B} \qquad \frac{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \leq B}{A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B}
 \end{array}$$

Die Axiome A11 und A12 definieren, ähnlich wie bei der Einführung in die Verbandstheorie, einen Hintergrundkalkül, in den die Begriffslogik eingebettet ist. Diese Axiome können aber nun so interpretiert werden,

daß es sich bei dem Hintergrundkalkül wieder um den Vordergrundkalkül selbst handelt. Die zusätzlichen Axiome können wie folgt gelesen werden:

A11 Die Deduktionsregel ist zu lesen als: Ist aus den Annahmen A_1 bis A_n die Formel B abgeleitet, so gewinnt man unter „Beseitigung“ dieser Annahmen (das deutet die Klammerung der A_1 bis A_n an) die nun im Kalkül ableitbare Formel $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \leq B$; oder anders: Aus dem Beweis $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ gewinnt man die Formel $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \leq B$.

A12 Die Abtrennungsregel ist zu lesen als: Aus A_1, A_2, \dots, A_n sowie $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \leq B$ ist B ableitbar; oder: Aus der Formel $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \leq B$ gewinnt man die Ableitung, den Beweis, die Regel $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$.

Satz 4.15 *Es gilt:*

$$(a \vdash b) \vdash (\bar{b} \vdash \bar{a})$$

Beweis:

$$\frac{\frac{\frac{a \vdash b}{a \leq b} \text{ A11}}{a \cdot \bar{b} \leq 0} \text{ Satz 4.5}}{\bar{b} \leq \bar{a}} \text{ Satz 4.5} \\ \bar{b} \vdash \bar{a} \text{ A12}$$

■

Satz 4.16 (inkonsistente Triade) *Es gilt:*

$$(a, b \vdash c) \vdash (a, \bar{c} \vdash \bar{b})$$

Beweis:

$$\frac{\frac{\frac{a, b \vdash c}{a \cdot b \leq c} \text{ A11}}{a \cdot \bar{c} \leq \bar{b}} \text{ Satz 4.11}}{a, \bar{c} \vdash \bar{b}} \text{ A12}$$

■

Es ist also möglich, die Kontraposition bzw. die „inkonsistente Triade“ nachzubilden. Eine offene Frage ist natürlich noch, ob der Kalkül $BV^{\leq, \bar{\cdot}}$, der durch Anwendung der inkonsistenten Triade nur auf die Grundregeln entsteht, gleichmächtig ist mit dem Kalkül der um die Axiome A11 und A12 erweiterten Begriffslogik, wenn diese zusätzlichen Axiome ausschließlich für die inkonsistente Triade bzw. Kontraposition eingesetzt werden. Die eine Richtung ist bereits erledigt, denn die Axiome -A6- bis -A10- wurden ja durch Anwendung der inkonsistenten Triade erzeugt. Die andere Richtung ist ungleich schwieriger und wird hier lediglich durch ein Konstruktionsverfahren plausibel gemacht. Gegeben ist also ein Beweis mit ausschließlich

unnegierten Beziehungen, sowie eine durch Kontraposition erzeugte Variante mit negierten Beziehungen. Der ursprüngliche Beweis wird zunächst soweit erweitert, bis nur noch Grundregeln angewendet werden, d.h. alle Hilfssatzanwendungen werden aufgelöst. Der Beweisast, der sich an die unnegiert gebliebene Prämisse oder Prämissen anschließt (falls vorhanden), bleibt unverändert. Für die anderen einzelnen Beweisschritte werden jeweils die entsprechenden kontraponierten Grundregelanwendungen eingesetzt, wobei es gelegentlich zwei Varianten geben kann. Anschließend werden die Beweisschritte in umgekehrter Reihenfolge angeordnet, und jeweils die passende Variante herausgesucht. So ergibt sich ein nur auf den Axiomen des Kalküls $BV^{\leq, \neq}$ basierender Beweis für jeden durch Kontraposition/inkonsistente Triade mittels A11 und A12 erzeugten Beweis.

Darüber hinaus bieten die Axiome A11 und A12 aber auch noch eine Reihe weiterer Möglichkeiten, denn die Verbindung von Unterordnung und Ableitbarkeit ist noch anderweitig nutzbar. Die Möglichkeiten dieser um die Axiome A11 und A12 erweiterten Begriffslogik (der Kalkül wird BL^+ genannt) gehen vor allem im Bereich der Beziehungsbegriffe über den Bereich der normalen Begriffslogik hinaus. Ansonsten ergeben sich keine Änderungen, denn die durch die Axiome erzeugte Beziehung zwischen der Ableitbarkeitsbeziehung und der Art-Gattungs-Beziehung zeigt ja, daß auf der höheren Ebene im Prinzip die gleichen Axiome gelten. Die Begriffslogik einschließlich A11 und A12 ist allerdings in bezug auf ihre Möglichkeiten „stärker“ als die Venn-Diagramme einschließlich Streichen und „Sternen“. Zumindest teilweise simulierbar wäre das Wirken der Regeln A11 und A12 durch die parallele Anwendung mehrerer Venn-Diagramme auf den verschiedenen Ebenen. Die Venn-Diagramme bieten zudem keine ordentliche Möglichkeit, „ \leq “ als Verknüpfungszeichen zu behandeln, sie entsprechen also eigentlich dem Kalkül $BV^{\leq, \neq}$.

4.3 Die Aussagenlogik

Im Gegensatz zur Begriffslogik untersucht die Aussagenlogik nicht Verknüpfungen von - und Beziehungen zwischen - Begriffen, sondern Verknüpfungen von - und Beziehungen zwischen - Urteilen. Während sich in der Begriffslogik Urteile als aus Begriffen zwischen denen eine Beziehung besteht, zusammengesetzt darstellen, sind die Urteile in der Aussagenlogik atomare, d.h. nicht weiter zerlegbare Gebilde. Diese atomaren Bestandteile können wahr oder falsch sein. Gegenstand der Aussagenlogik ist, wie sich die „Wahrheitswerte“ der atomaren Bestandteile zu Wahrheitswerten komplexer sprachlicher Gebilde fortsetzen lassen.

4.3.1 Syntaktische Definition der Aussagenlogik

| | | |
|--------------|---------------------------------|---------------------|
| Grundzeichen | A B C ... | Variablen |
| | 0 1 | Konstanten |
| | \rightarrow \leftrightarrow | Beziehungszeichen |
| | \neg \vee \wedge | Verknüpfungszeichen |
| Ausdrücke | Terme | |

1. Zeichen des Alphabetes (Variablen und Konstanten), die auch (mehrfach) mit Indizes oder Exponenten (aus dem Alphabet) versehen sein dürfen.
2. Sind S und T Terme, so auch $S \wedge T$ und $S \vee T$; ist S ein Term, so auch $\neg S$.
3. Ist S ein Term, so ist S auch eine Formel.

Formeln

1. Zeichen des Alphabetes, die auch (mehrfach) mit Indizes oder Exponenten (aus dem Alphabet) versehen sein dürfen.
2. Sind S und T Terme, so sind $S \rightarrow T$ und $S \leftrightarrow T$ Formeln.
3. Sind A und B Formeln, so auch $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$; ist A eine Formel, so auch $\neg A$.

Die eindeutige Lesbarkeit der Ausdrücke wird nötigenfalls durch Setzen von Klammern gewährleistet.

In dieser Beschreibung scheint entweder die Kategorie Formel oder die Kategorie Term überflüssig zu sein. Diese Darstellung wurde jedoch bewußt gewählt, um deutlich zu machen, daß zusätzlich zu den Bedingungen der formalen Sprache der Begriffslogik in der Aussagenlogik noch gilt, daß alle Terme auch Formeln sind. Da in der Begriffslogik bereits alle Formeln wie Terme behandelt werden durften, werden diese beiden Begriffe hier damit tatsächlich äquivalent. Damit werden dann auch alle Verknüpfungszeichen zu Beziehungszeichen.

Diese syntaktische Definition der Aussagenlogik enthält im Prinzip nur die Beschreibung der formalen Sprache. Sie ist im gewissen Sinne nicht vollständig, und daher benötigt man zusätzliche Definitionen.

4.3.2 Semantische Definition der Aussagenlogik

Die Elemente der Menge $\{0, 1\}$ heißen Wahrheitswerte.

Eine Belegung ist eine Funktion $\mathcal{A} : \mathcal{D} \longrightarrow \{0, 1\}$, wobei \mathcal{D} die Menge aller Formeln ist. \mathcal{A} wird auch *Interpretation* genannt. Dann gilt:

1. $\mathcal{A}(F \wedge G) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
2. $\mathcal{A}(F \vee G) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
3. $\mathcal{A}(\neg F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Die Beziehungszeichen \rightarrow und \leftrightarrow sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} F \rightarrow G & \text{ als } \neg F \vee G \\ F \leftrightarrow G & \text{ als } (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \end{aligned}$$

Die Wirkung der Operationen \wedge , \vee und \neg kann auch durch Verknüpfungstabellen dargestellt werden:

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(F \wedge G)$ |
|------------------|------------------|---------------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(F \vee G)$ |
|------------------|------------------|-------------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(\neg F)$ |
|------------------|-----------------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Aus der Definition von $\mathcal{A}(F)$ läßt sich erkennen, daß das Symbol „ \wedge “ das umgangssprachliche Wort „und“, „ \vee “ das „oder“ und „ \neg “ das Wort „nicht“ modelliert. Mit Hilfe von \mathcal{A} bildet man also die zunächst „bedeutungslosen“ Ausdrücke der syntaktischen Definition der Aussagenlogik in einen Bereich ab, in dem sie eine Bedeutung haben.

Auch die Beziehungszeichen \rightarrow und \leftrightarrow lassen sich durch „Verknüpfungstabellen“ darstellen:

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(F \rightarrow G)$ |
|------------------|------------------|--------------------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(F \leftrightarrow G)$ |
|------------------|------------------|------------------------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

„ \rightarrow “ steht für „impliziert“ oder auch „wenn dann“, während „ \leftrightarrow “ für „genau dann wenn“ steht.

Definition 4.1 (gültig, erfüllbar) Sei F eine Formel und \mathcal{A} eine Belegung. Falls \mathcal{A} für alle in F vorkommenden atomaren Formeln definiert ist, so heißt \mathcal{A} zu F passend.

Gibt es eine passende Belegung \mathcal{A} zu F mit $\mathcal{A}(F) = 1$, so heißt F erfüllbar, sonst unerfüllbar.

Gilt für jede passende Belegung \mathcal{A} zu F : $\mathcal{A}(F) = 1$, so heißt F gültig oder auch Tautologie.

4.3.3 Eine Axiomatik der Aussagenlogik

Auch für die Aussagenlogik kann man ein Axiomensystem zur Ableitung aussagenlogischer Ausdrücke aufstellen. Das im folgenden vorgestellte Axiomensystem beruht auf der bisherigen formalen Sprache. Es basiert lediglich auf den Zeichen \rightarrow und \neg und stammt bereits von G. Frege, wurde allerdings von J. Lukasiewicz und A. Tarski [18] vereinfacht. Die anderen Zeichen werden mittels zusätzlicher Axiome aus diesen definiert. Es gibt zahlreiche andere Axiomensysteme, die sich aber letztlich alle als äquivalent erwiesen haben.

$$\begin{array}{ll}
 \text{U1} & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\
 \text{U2} & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
 \text{U3} & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \\
 \text{U4} & \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}
 \end{array}$$

Bei dem Axiom U4 handelt es sich um den bekannten „modus ponens“. Mit Hilfe eines solchen Axiomensystems ist es möglich, alle und nur, Tautologien abzuleiten (Korrektheits- und Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik, Hilbert-Ackermann [19]).

Man muß sich fragen, warum in üblichen Darstellungen der Aussagenlogik nicht von Anfang an eine ordentliche syntaktische Definition der Aussagenlogik eingeführt wird, die z.B. obiges Axiomensystem enthält. Dann könnte man auf die gesamte semantische Definition verzichten, denn diese enthält eine wichtige Grundfiktion. Man tut so, als wüßte man in genügenden Maße, wie man in der Umgangssprache mit den Wörtern „und“, „oder“ und „nicht“ umgeht. Dabei zeigt allein die Diskussion um das „oder“ (ausschließlich oder nicht ?), daß dem nicht so ist. In einem gewissen Sinne ist auch die Umgangssprache ein Kalkül, die Abbildung der bedeutungslosen syntaktischen Ausdrücke in den Bereich der Umgangssprache eine Art Übersetzung in eine anderen Kalkül, und zwar in einen wesentlich stärkeren. Im Prinzip hat man das Problem also nur in einen anderen Kalkül verschoben, in Wirklichkeit aber nichts gewonnen.

4.3.4 Aussagenlogik - Boolescher Verband

Satz 4.17 Die vorgelegte aussagenlogische Axiomatik ist ein Boolescher Verband, wenn man \rightarrow mit \sqsupseteq übersetzt, sowie \wedge mit \sqcap , \vee mit \sqcup , 0 mit 0 , 1 mit 1 und \neg mit \neg .

Beweis: Es ist nachzuweisen, daß sich alle Axiome des Booleschen Verbandes aus den Axiomen der Aussagenlogik nach Übersetzung ableiten lassen. Um uns das Leben zu vereinfachen, werden wir den Korrektheitssatz und den Vollständigkeitssatz von Hilbert-Ackermann benutzen. Es genügt also nachzuweisen, daß die Axiome des Booleschen Verbandes nach Übersetzung Tautologien sind.

(V1a)

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(H)$ | $\mathcal{A}(F \vee G)$ | $\mathcal{A}((F \vee G) \vee H)$ | $\mathcal{A}(G \vee H)$ | $\mathcal{A}(F \vee (G \vee H))$ | $\mathcal{A}((F \vee G) \vee H \leftrightarrow F \vee (G \vee H))$ |
|------------------|------------------|------------------|-------------------------|----------------------------------|-------------------------|----------------------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(V1b)

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(H)$ | $\mathcal{A}(F \wedge G)$ | $\mathcal{A}((F \wedge G) \wedge H)$ | $\mathcal{A}(G \wedge H)$ | $\mathcal{A}(F \wedge (G \wedge H))$ | $\mathcal{A}((F \wedge G) \wedge H \leftrightarrow F \wedge (G \wedge H))$ |
|------------------|------------------|------------------|---------------------------|--------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(V2a)

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(F \vee G)$ | $\mathcal{A}(G \vee F)$ | $\mathcal{A}(F \vee G \leftrightarrow G \vee F)$ |
|------------------|------------------|-------------------------|-------------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(V2b)

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(F \wedge G)$ | $\mathcal{A}(G \wedge F)$ | $\mathcal{A}(F \wedge G \leftrightarrow G \wedge F)$ |
|------------------|------------------|---------------------------|---------------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(V3a)

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(F \vee G)$ | $\mathcal{A}(F \wedge (F \vee G) \leftrightarrow F)$ |
|------------------|------------------|-------------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

(V3b)

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(F \wedge G)$ | $\mathcal{A}(F \vee (F \wedge G) \leftrightarrow F)$ |
|------------------|------------------|---------------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

(V4a)

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(H)$ | $\mathcal{A}(G \vee H)$ | $\mathcal{A}(F \wedge (G \vee H))$ | $\mathcal{A}(F \wedge G)$ | $\mathcal{A}(F \wedge H)$ | $\mathcal{A}((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ | $\mathcal{A}(F \wedge (G \vee H) \leftrightarrow (F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ |
|------------------|------------------|------------------|-------------------------|------------------------------------|---------------------------|---------------------------|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(V4b)

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(G)$ | $\mathcal{A}(H)$ | $\mathcal{A}(G \wedge H)$ | $\mathcal{A}(F \vee (G \wedge H))$ | $\mathcal{A}(F \vee G)$ | $\mathcal{A}(F \vee H)$ | $\mathcal{A}((F \vee G) \wedge (F \vee H))$ | $\mathcal{A}(F \vee (G \wedge H) \leftrightarrow (F \vee G) \wedge (F \vee H))$ |
|------------------|------------------|------------------|---------------------------|------------------------------------|-------------------------|-------------------------|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Größtes/Kleinstes Objekt

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(F \vee 0)$ | $\mathcal{A}(F \vee 0 \leftrightarrow A)$ | $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(F \wedge 1)$ | $\mathcal{A}(F \wedge 1 \leftrightarrow A)$ |
|------------------|-------------------------|---|------------------|---------------------------|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Komplement

| $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(\neg F)$ | $\mathcal{A}(F \vee \neg F)$ | $\mathcal{A}(F \vee \neg F \leftrightarrow 1)$ | $\mathcal{A}(F)$ | $\mathcal{A}(\neg F)$ | $\mathcal{A}(F \wedge \neg F)$ | $\mathcal{A}(F \wedge \neg F \leftrightarrow 0)$ |
|------------------|-----------------------|------------------------------|--|------------------|-----------------------|--------------------------------|--|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Auch hier wäre noch die Substitutionsregel des Booleschen Gleichungskalküls zu beweisen. Dieser Beweis geht jedoch nicht über den Beweis in Abschnitt 4.1.2 hinaus, da es eine Beziehung zwischen „ \rightarrow “ und „ \vee “ bzw. „ \neg “ gibt, die den Beweis auf die „normalen“ Verknüpfungszeichen reduziert. ■

Die Aussagenlogik ist ein Boolescher Verband. Die andere Richtung gilt nicht, denn ein Boolescher Verband bietet bereits rein von seiner formalen Sprache her keine Möglichkeit, einen einzelnen Term als Voraussetzung oder Ergebnis einer Ableitung zu bekommen. Dort gibt es immer nur Formeln, also Ausdrücke der Form $a = b$ oder $a \sqsubseteq b$.

4.3.5 2-wertige Boolesche Verbände

Ein aussagenlogisches Urteil ist entweder wahr oder falsch, etwas formaler: Für jedes Objekt a gilt: Es ist $a = 1$ oder $a = 0$.

Versucht man dieses Verhalten auf der Basis eines Booleschen Verbandes in Regeln zu gießen, so erhält man z.B.:

$$\frac{a = 0}{a \neq 1} \qquad \frac{a \neq 1}{a = 0}$$

„Wenn a gleich 0 ist, dann ist a ungleich 1, und umgekehrt“

Andere Varianten ergeben sich durch Kontraposition der Regeln. Mit diesen Regeln erreicht man, daß sich der Bildbereich Boolescher Funktionen auf zwei speziell ausgezeichnete Werte reduziert. Nachwievor gibt es aber keine Möglichkeit, Ausdrücke zu erzeugen, die keine Beziehungszeichen enthalten. Die Zweiwertigkeit genügt also noch nicht, um die Aussagenlogik zu erhalten.

4.3.6 Das Urteilsprinzip

Wir haben gesehen, daß die erweiterte Begriffslogik ein spezieller Boolescher Verband ist. Eben solches gilt für die Aussagenlogik, wobei Zweiwertigkeit zur Charakterisierung nicht ausreicht.

Der wesentliche Unterschied zwischen Begriffen und Urteilen ist, daß letztere immer behauptet werden, während daß für Begriffe im allgemeinen nicht gilt. So ist z.B. die Frage nach dem Wahrheitswert des Begriffes „Hund“ ziemlich sinnlos, wohingegen diese Frage bei dem als Begriff betrachteten Urteil „Alle Hunde sind braun“ durchaus Sinn macht.

Mit „Alle Hunde sind braun“ stellt man eine Behauptung auf, nämlich daß der vorgelegte Satz wahr sei. Dieses Prinzip, das sogenannte Urteilsprinzip, kann wie folgt charakterisiert werden:

Jedes Urteil A ist gleichbedeutend mit dem Urteil „ A ist wahr“ bzw. „ A gilt“.

Formuliert man dieses Prinzip im oben vorgelegten begriffslogischen Kalkül BL^+ , so ergeben sich die folgenden Regeln:

$$A13 \qquad \frac{A}{A = 1} \qquad \frac{A = 1}{A}$$

Die Axiome der erweiterten Begriffslogik (A1 - A12) zuzüglich des Axioms A13 ergeben einen Kalkül, genannt BL_u^+ , der nach Übersetzung mit der Aussagenlogik äquivalent ist. Dieser Beweis soll hier nicht

geführt werden, der interessierte Leser sei auf [8] verwiesen.

Dieses Ergebnis: „**Die Aussagenlogik ist eine spezielle Begriffslogik**“ löst auch die seit Beginn bis zur Mitte dieses Jahrhunderts sehr kontrovers und sehr polemisch geführte Diskussion zwischen Begriffs- und Aussagenlogikern, welches denn nun die „richtige“ Logik sei.

Uns ermöglicht dieses Ergebnis eine einfache Einbindung der Aussagenlogik in den Bereich der durch Venn-Diagramme zu bearbeitenden Booleschen Verbände. Mit Hilfe des Urteilsprinzips werden Ausdrücke ohne die „Beziehungszeichen“ \rightarrow und \leftrightarrow in Formeln umgewandelt, die dann als Schraffuren in die Diagramme eingetragen werden können. Sternung wird aufgrund der Zweiwertigkeit der Aussagenlogik nicht benötigt. Umgedreht können die Schraffuren in den Diagrammen (Unterordnungen) auch wieder mit Hilfe des Urteilsprinzips in Terme der Aussagenlogik verwandelt werden.

Diese Operationen haben allerdings durch den Benutzer, den Interpreten der Diagramme zu geschehen.

Auf der einen Seite läßt sich also Begriffslogik mit Venn-Diagrammen durchführen, aber wie eben zu sehen war auch Aussagenlogik. Man könnte daher auf den Gedanken kommen, Begriffslogik und Aussagenlogik wären irgendwie äquivalent, was im Gegensatz zu der obigen Behauptung stände, daß die Aussagenlogik eine spezielle Begriffslogik ist.

Äquivalenzbeweise zwischen zwei Kalkülen gelten immer nur relativ zu der verwendeten Übersetzung. Ist die Übersetzung sehr stark, wie z.B. durch das Einbauen zusätzlicher Axiome, die dann mittels der Übersetzung implizit angewendet werden, so ergeben sich Äquivalenzbeweise ohne jede Aussagekraft. So ist es auch im Fall Aussagenlogik – Venn-Diagramm. Das verstärkende Axiom steckt als Urteilsprinzip in der Übersetzung.

4.4 Der Klassenkalkül

Die Aussagenlogik ist zur Darstellung derjenigen logischen Zusammenhänge ausreichend, bei denen die Aussagen als ungetrenntes Ganzes betrachtet werden. Nicht jedoch ist sie geeignet, Begriffsverhältnisse darzustellen, wie dieses z.B. mit der Begriffslogik möglich ist.

Gelöst wurde das Problem z.B. durch einen Rückgriff auf die Teilmengenbeziehung der Mengenlehre, bzw. auf andere Beziehungen zwischen Mengen. Dazu wurde die Mengenalgebra in die Aussagenlogik als Rahmenkalkül eingebettet.

In der Mengenalgebra sind Terme (Verknüpfungen durch \cap , \cup und \neg) vollständig getrennt von Formeln (Beziehungen mit \subseteq oder $=$). In logischen Kalkülen darf man alle Formeln auch als Terme behandeln, in einigen sogar auch alle Terme als Formeln. Diese Unterscheidung bietet eine interessante, rein syntaktische, Unterscheidung von logischen und nicht-logischen Kalkülen.

Entsprechend ihres nicht-logischen Charakters war die logische Einbettung der Mengenalgebra also notwendig, um eine Logik zu erhalten. Zur Unterscheidung von der Mengenalgebra sagt man nicht „Menge“, sondern „Klasse“ und nennt den Kalkül „Klassenkalkül“.

Bei Hilbert-Ackermann [19] war eine Klasse der Individuenbereich, auf den die Klasseneigenschaften zutrafen. Der Individuenbereich ist jedoch im allgemeinen nur ein Teil des tatsächlichen Umfangsbereichs einer Eigenschaft, eben nur die Individuen. Diese Klassendefinition führt zu Problemen mit der Inhalts-Umfangs-Relation (mehr Inhalt - weniger Umfang und umgedreht), wenn man Umfang mit Klasse gleichsetzt. Albert Menne [21] korrigierte die Hilbertsche Klassendefinition, übernahm andererseits aber Bolzanos Kritik an der Inhalts-Umfangs-Relation, die auf einer solchen „schiefen“ Inhalts- und Umfangsdefinition beruhte.

Die Klassenlogik ist also die Einbettung eines Booleschen Verbandes in einen spezielleren Booleschen Verband. Beide Verbände können mit Venn-Diagrammen behandelt werden.

4.4.1 Mengenlehre und Elementbeziehung

Üblicherweise wird allerdings die Mengenlehre nicht, wie im Abschnitt 4.1 geschehen, auf der Basis der Teilmengenbeziehung, sondern auf der Elementbeziehung aufgebaut. Dieses geschieht oftmals wie folgt:

Man sagt zwei Mengen X und Y sind gleich, und schreibt $X = Y$, genau dann, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Wenn eine Menge X nur aus Elementen besteht, die alle auch einer zweiten Menge Y angehören, so nennt man X eine Teilmenge von Y und schreibt $X \subseteq Y$.

Zwei besondere Mengen, die immer wieder auftauchen, haben spezielle Namen. Die eine nennt man Universalmenge, sie ist definiert als die Menge aller Elemente des Untersuchungsbereichs. Jede Menge ist daher Teilmenge der Universalmenge, die auch mit dem Symbol 1 bezeichnet wird.

Die andere Spezialmenge ist definiert als die Menge, die überhaupt kein Element enthält, genannt Nullmenge und auch mit dem Symbol 0 bezeichnet. Die Nullmenge ist damit Teilmenge von jeder Menge.

Eine Einsmenge ist definiert als eine Menge, die genau ein Element enthält.

Jeder Menge X wird eine Komplementmenge X' zugeordnet, die alle Elemente enthält, die zur Universalmenge, aber nicht zur Menge X gehören.

Die Menge $X \cup Y$ ist definiert als die Menge der Elemente, die entweder in der Menge X oder in der Menge Y oder in beiden Mengen enthalten sind.

Die Menge $X \cap Y$ ist definiert als die Menge der Elemente, die sowohl in der Menge X als auch in der Menge Y enthalten sind.

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde eine rein formale Unterscheidung zwischen nicht-logischen und logischen Kalkülen verwendet. Nicht-logische Kalküle sind gekennzeichnet durch eine strikte Trennung zwischen Formeln und Termen, zwischen Beziehungszeichen und Verknüpfungszeichen. Die Mengenlehre ist eine Anwendung eines nicht-logischen Booleschen Verbandes, denn wenn X und Y Mengen sind, dann ist $X \subseteq Y$ keine Menge, sondern eine Teilmengenbeziehung, die nicht wieder als Menge interpretiert werden kann. Die Mengenlehre läßt sich daher in den Bereich der Kalküle $BV^=$ bzw. BV^{\subseteq} einordnen.

Logische Kalküle sind dadurch gekennzeichnet, daß Formeln wie Terme behandelt werden dürfen, d.h. daß Beziehungszeichen auch Verknüpfungszeichen sind. Das erlaubt in diesen Kalkülen Ausdrücke der Form $(a \leq b) \leq (a \leq a + b)$. Dieses macht Sinn, denn eine Beziehung zwischen zwei Begriffen kann als ein Beziehungsbegriff interpretiert werden, ist damit wieder ein Begriff, und eine Implikation zwischen zwei Urteilen ist wiederum ein Urteil.

Der Kalkül BL ist eine einfache Variante eines logisch interpretierten Booleschen Verbandes, denn er erweitert nur die Möglichkeiten der formalen Sprache gegenüber dem nicht-logischen Booleschen Verband, nicht jedoch die Axiomatik. Erst der Kalkül BL^{\vdash} erweitert dann auch die Axiomatik, indem er eine Verbindung zwischen der Unterordnung und der Ableitungsbeziehung herstellt. Im Kalkül BL^{\vdash} ist dann auch bereits ein Verknüpfungszeichen zum Beziehungszeichen geworden, nämlich die Negation. Die Urteilslogik (hier Aussagenlogik), eine spezielle Begriffslogik durch Hinzufügung des Urteilsprinzips als weiteres Axiom, ist dadurch gekennzeichnet, daß dort alle Verknüpfungszeichen auch zu Beziehungszeichen geworden sind, bzw. daß alle Terme auch wie Formeln behandelt werden dürfen. Das erlaubt Formeln der Form „ A “ oder „ $A \wedge B$ “, die allein stehend in der Begriffslogik im allgemeinen keinen Sinn ergeben.

Die Venn-Diagramme stehen irgendwo neben dieser Kalkülhierarchie. Einerseits basieren sie auf dem Kalkül BV^{\subseteq} , andererseits verfügen sie mittels der Sternung über die Möglichkeit der Behandlung negierter Unterordnungen. Die Venn-Diagramme bieten keine Möglichkeit, Beziehungsbegriffe zu behandeln, weshalb die Anwendung der Diagramme auf den Kalkül BL auf eine logische Interpretation des Kalküls BV^{\subseteq} beschränkt bleibt. Aus dem Kalkül BV^{\subseteq} läßt sich jedoch der Kalkül $BV^{\subseteq, \neq}$ bzw. $BV^{\leq, \neq}$ entwickeln, der als zusätzliche Axiome die mittels inkonsistenter Triade bzw. Kontraposition veränderten Grundregeln des Kalküls BL

enthält. Dieser Kalkül entspricht ziemlich genau den Möglichkeiten der Venn-Diagramme. Der Kalkül BL^+ bietet ebenfalls die negierte Unterordnung, überschreitet jedoch die Möglichkeiten von $BV^{\leq 2}$.

Die Aussagenlogik ist wiederum eine Spezialisierung des Kalküls BL^+ zu BL_u^+ , nämlich durch Hinzufügung des Urteilsprinzips. Wird dieses Prinzip vom Nutzer der Diagramme von Hand angewendet, so kann auch die Aussagenlogik in Venn-Diagrammen behandelt werden. Durch die Äquivalenz von „Formeln“ und „Termen“ ist auch wieder die gesamte Behandlung des formalen Sprachapparates möglich, denn geschachtelte Implikationen können in einfache Implikationen überführt werden. Auch dieses hat durch den Nutzer der Diagramme zu erfolgen.

Denkbar ist auch ein gemischter Begriffs- und Urteilslogischer Kalkül, in dem das Urteilsprinzip nur auf Beziehungsbegriffe angewendet werden darf. Dieser Kalkül, genannt $BL_{u'}^+$, ist eine Synthese von Begriffs- und Urteilslogik.

Insgesamt läßt sich feststellen, daß die Venn-Diagramme eine brauchbare Methode darstellen, den Bereich der Booleschen Verbände zu bearbeiten. Den Mangel in der Behandlung von Beziehungsbegriffen in der Begriffslogik kann man verschmerzen, denn die „klassische“ Begriffslogik bietet eigentlich keine formalen Mittel an, solche Ausdrücke auch nur geeignet aufzuschreiben, geschweisedenn zu behandeln.

Ganz deutlich sei hier auch noch einmal daraufhingewiesen, daß mit Venn-Diagrammen **allgemeine**, d.h. nicht etwa nur zweiwertige, Boolesche Verbände behandelt werden können. Es ist eine beliebte Geisteshaltung, Boolesche Verbände auf zweiwertige zu beschränken.

Kapitel 5

Zur Geschichte der Venn-Diagramme

Die Geschichte der Venn-Diagramme ist, wenigstens zum Teil, auch die Geschichte der Logik, insbesondere die Geschichte der graphischen Darstellung logischer Beziehungen, und die Geschichte der Verbandstheorie, insbesondere die Geschichte der Booleschen Verbände.

Allein mit diesem Thema könnte man ganze Bände füllen, daher werden wir uns hier auf sehr grobe Überblicke und kurze Ausschnitte beschränken müssen. Außerdem wird die Geschichte der Logik hier nur soweit entwickelt werden, wie es notwendig erscheint, um deutlich zu machen, wie es zur Entwicklung der Venn-Diagramme kam.

5.1 Eine kurze Geschichte der Logik

Die Geschichte der Logik im Abendland als eigene Wissenschaft beginnt im Prinzip mit den später zum „Organon“ zusammengefaßten logischen Schriften des Aristoteles. Auch im arabischen Raum gab es logische Schriften, diese hatten jedoch kaum maßgeblichen Einfluß.

Aristoteles betrieb im wesentlichen Begriffslogik, es finden sich jedoch auch einige modale und sogar urteilslogische Stellen in seinen Werken.

In der Scholastik wurde die Aristotelische Logik nahezu auf die Syllogistik und auf die Lehre vom hypothetischen Schluß reduziert, der syllogistische Bereich allerdings durch unnötigen Ballast erweitert (Kategorienlehre, Suppositionslehre, u.a.). Als solche wurde sie die klassische philosophische Logik, belastet mit allen möglichen psychologischen, linguistischen und ontologischen Einflüssen. Als Konsequenz dessen beschäftigten sich die mittelalterlichen Logiker mit lauter Problemen, die eigentlich nichts mit reiner Logik zu tun hatten. Da war z.B. die Frage der Reihenfolge der Begriffe im i-Urteil, die Frage also, ob es einen Unterschied gibt zwischen: „Einige Pferde sind schwarz“ und „Einiges Schwarze ist Pferd“? Vom sprachlichen Standpunkt ist das sicherlich sehr interessant, aber rein logisch ist es ohne jede Bedeutung. Dennoch wurden

Schlüsse eingeführt, die Rücksicht auf die Reihenfolge der Begriffe in den Urteilen nahmen, und machten die Logik damit komplizierter, als es eigentlich nötig gewesen wäre.

Auf der anderen Seite finden sich bei den Stoikern, bei Philon und im Mittelalter bei Ramon Lull bereits urteilslogische Ansätze. Im Grunde wurde allerdings nur Aussagenlogik betrieben, was eine zusätzliche eigene Begriffslehre nötig machte, da Begriffsbeziehungen in der Aussagenlogik nicht adäquat ausgedrückt werden können.

Mitte des 17. Jahrhunderts arbeitete Leibniz im wesentlichen begriffslogisch, wurde jedoch auch von Lull beeinflusst, und obwohl er sich eine „lingua universalis“ wünschte, hatte er doch keinen wirklich geeigneten Formalismus. Das ist der Grund für zahlreiche Fehler in den Leibnizschen Werken; Fehler, die später zu Unrecht dem Konzept „Begriffslogik“ angelastet wurden.

Begriffslogik und Urteilslogik liefen praktisch parallel nebeneinander her, wobei die Begriffslogik allerdings leichte Vorteile besaß. Bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts gab es kaum weitere bahnbrechende Entwicklungen in der Logik.

Das änderte sich mit Boole und De Morgan. Boole bahnte mit seiner „Algebra der Logik“ neue Wege, indem er die Logik in einer von der Mathematik abgeleiteten formelartigen Weise darstellte. Booles Ansatz wurde von vielen weiterentwickelt und von Schröder nahezu vollendet.

Booles Ideen fanden Anwendung sowohl in der Begriffs- als auch in der Urteilslogik, jedoch führten sie zunächst nur in der Urteilslogik zum Ziel, die Begriffslogik blieb weiter unformalisiert. Schröder versuchte z.B. in späteren Jahren die Undurchführbarkeit einer „Inhaltslogik“, die weitgehend mit der Begriffslogik gleichgesetzt wurde, zu beweisen.

Frege leitete dann mit einem seiner wichtigsten Werke, das sinnigerweise den Namen „Begriffsschrift“ trägt und nichts mit Begriffslogik zu tun hat, den Siegeszug der Urteilslogik ein. Obwohl Freges graphischer Kalkül heute nicht mehr benutzt wird, setzte sich sein Konzept „Das Urteil als Basis der Logik“ durch. Maßgeblich verantwortlich hierfür sind Russell und Whitehead mit ihren „Principia Mathematica“. Nur die Urteilslogik wurde „mathematisch“ formalisiert, die Begriffslogik aber blieb in den Händen der Philosophen und entwickelte sich nur unwesentlich weiter.

So kam es, daß die Begriffslogik sehr bald in den Ruf geriet, veraltet, problemadäquat und unbrauchbar zu sein. Nicht etwa weil sie es wirklich war, sondern weil es unterlassen wurde, sie wie die Urteilslogik geeignet zu entwickeln und zu formalisieren. Dieses ist inzwischen nachgeholt worden, der „Vorsprung“ der Urteilslogik ist jedoch vermutlich uneinholbar.

5.2 Zur Geschichte der Booleschen Verbände

Dieser Überblick beschränkt sich auf die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts, da alle wesentlichen Entdeckungen zu diesem Thema in diesem Zeitraum liegen.

Boole veröffentlichte 1847 ein kleines Bändchen mit dem Namen „Mathematical Analysis of Logic“. Seit 20 Jahren lag diese mathematische Analyse der Logik in der Luft, den Anlaß sie auszuarbeiten und zu veröffentlichen bildete der heftige Streit zwischen William Hamilton und Augustus De Morgan über die Quantifizierung des Prädikates in der klassischen Syllogistik. 1854 veröffentlichte Boole dann seine „Laws of Thought“, sein zweites Hauptwerk zur Algebra. Diese ersten Arbeiten bewegten sich noch zu nahe an der Mathematik, insbesondere an der Arithmetik. So führte Boole neben der Addition und der Multiplikation auch die Subtraktion in die Logik ein. Dazu allerdings mußte er die Addition als nur für disjunkte Klassen gültig definieren. De Morgan gilt neben Boole mit seiner „Formal Logic“, ebenfalls von 1847, als Begründer der symbolischen Logik.

Unabhängig von den Arbeiten in England scheint der Logikkalkül von Robert Grassmann entstanden zu sein. 1872 veröffentlichte er „Die Formenlehre oder Mathematik“; Grundgedanken finden sich bereits 1844 in der „Ausdehnungslehre“ des Bruders Hermann Grassmann. Im Laufe der Untersuchungen wird auch die Halbordnung eingeführt, die bei Boole noch fehlt. In der formalen Grundlegung ist der Kalkül dem von Boole mindestens gleichwertig. Er blieb jedoch ohne merklichen Einfluß, lediglich Ernst Schröder bezieht sich ausdrücklich auf die Brüder Grassmann.

W. Stanley Jevons veröffentlichte 1864 seine „Pure Logic“. Jevons ersetzte die disjunkte Boolesche Addition durch die „logische“ Addition. Diesen Schritt machten unabhängig von Jevons auch Charles S. Peirce und Ernst Schröder. John Venn verteidigte Booles Ansatz, er mußte sich aber letztlich geschlagen geben und schwenkte ebenfalls um.

Schröders erste logische Veröffentlichung war „Der Operationskreis des Logikkalküls“ von 1877. 1890 folgten dann die dreibändigen „Vorlesungen zur Algebra der Logik“, die auf den Arbeiten von Peirce basieren.

1904 veröffentlichte Huntington in einem Aufsatz mit dem Titel „Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic“ mehrere verschiedene Axiomensysteme für Boolesche Verbände / Algebren.

5.3 Graphische Darstellungen logischer Beziehungen

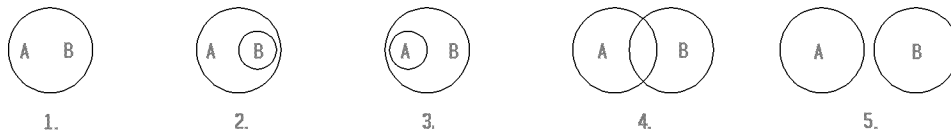
Graphische Darstellungen zu logischen Problemen und Kategorien gibt es, seit es logische Untersuchungen gibt. Graphische Darstellungen logischer Beziehungen gab es offenbar erst viel später.

J.C. Lange veröffentlichte 1712 das Buch „Nucleus Logicae Weisianae“, das nach dem Tode von Christian Weise dessen Logik behandelte. Die darin vorkommenden logischen Diagramme sind aber wohl von Lange darin eingefügt worden. Lambert, der Langes Werk studiert hat, sagt in seiner

„Architectonic“, daß es eine gewisse Anzahl von durch Rechtecke und Kreise illustrierte Syllogismen enthält. Langes Arbeiten blieben noch ohne große Wirkung, erst mit Euler wurde die graphische Darstellung logischer Beziehungen hoffähig. Lambert wie auch vor ihm Leibniz verwendeten waagerechte Striche, um logische Beziehungen darstellen zu können. Diese Darstellungsform erwies sich jedoch als ziemlich ungeeignet.

Die erste Veröffentlichung über die bekannten Euler Kreise findet sich in dem Werk „Briefe an eine deutsche Prinzessin“, Brief 102 - 108, der erste datiert vom 24. Februar 1761.

Euler repräsentierte eine Klasse durch einen Kreis und fragte sich, in welchen Relationen Inhalte und Umfänge zweier Klassen zueinander stehen können:



Dieses sind:

1. Alle A sind alle B
2. Alle B sind A
3. Alle A sind B

4. Einige A sind B / Einige A sind nicht B / Einige B sind nicht A
5. Kein A ist B

In Punkt 4 wird ein Problem der Euler-Diagramme sichtbar. Sie sind nicht eindeutig ! Es wurden zahlreiche Verbesserungsvorschläge gemacht, um diese Probleme zu beseitigen, als sonderlich effektiv erwies sich aber keiner. Ein anderes Problem ist, daß Widersprüche aus topologischen Gründen nicht gezeichnet werden können, schwierig wenn man gerade diese untersuchen will. Insgesamt waren die Euler-Diagramme aber doch insoweit brauchbar, daß sie sich in der Folgezeit weit verbreiteten.

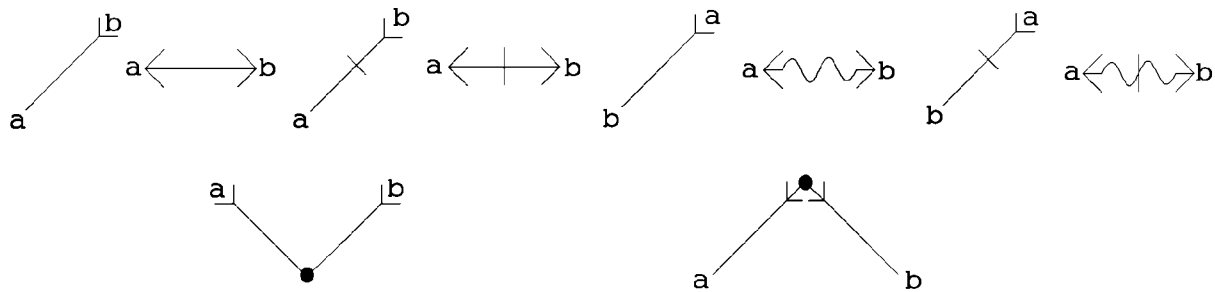
Bereits in Schröders „Operationskreis des Logikkalküls“ (1877) finden sich Diagramme für 2 bzw. 3 Begriffe, die den Venn-Diagrammen sehr ähnlich sind, jedoch nicht zum Eintragen von Beziehungen benutzt wurden. Auch Schröder schraffierte Zellen in seinen Diagrammen, allerdings nur um diese zu kennzeichnen, wie wir das durch den Punkt getan haben.

1880 veröffentlichte John Venn seinen Artikel „On the diagrammatic and mechanical representations of propositions and reasoning“ [13], der als die eigentliche Geburtsstunde der Venn-Diagramme gelten muß. Bereits vorher hatte sich Venn mit graphischen Darstellungen logischer Beziehungen beschäftigt [11, 12] und fühlte sich offenbar angeregt, die Funktionalität der bekannten Eulerschen Kreisdiagramme zu verbessern. Zusammen mit einigen anderen Artikeln veröffentlichte Venn seine Ergebnisse 1881 in dem Buch „Symbolic Logic“ [14]. Bemerkenswert an diesem Buch ist, daß Venn zu diesem Zeitpunkt noch an Booles „exklusivem Oder“ festhielt und daß die Venn-Diagramme noch keine Möglichkeit boten, partikuläre Urteile darzustellen und zu verarbeiten. 1894 veröffentlichte Venn die „Symbolic Logic“ [15] in zweiter Auflage mit einigen drastischen Änderungen. Zum einen verwendete er nun ebenfalls das „logische Oder“, zum anderen konnten nun auch partikuläre Urteile in den Diagrammen verarbeitet werden. Die Verwendung des „logischen Oders“ kam sicherlich durch den „Druck der Masse“ zustande, insbesondere durch Schröders „Vorlesungen zur Algebra der Logik“. Der Einbau der partikulären Urteile ergab sich offenbar durch die Bearbeitung und die Diskussion logischer Aufgaben, wie sie zu jener Zeit z.B. im „Mind“ in großer Zahl veröffentlicht wurden. Eine genaue Jahreszahl läßt sich nicht angeben, 1894 sind sie jedenfalls da. Allerdings markierte Venn die betroffenen Zellen nicht durch Sterne und verbindende Striche, sondern durch Zahlen. Die „Sternung“ geht auf die Schule von C.I. Lewis [16] zurück, und setzte sich sehr bald durch.

In der Folge regten die Venn-Diagramme zahlreiche weitere sehr ähnliche graphische Darstellungen an. Genannt seien hier nur die Namen Lewis Carrol („Alice im Wunderland“), Allan Marquand und Alexander Macfarlane. Die Zahl der Artikel, die sich mit der Erweiterung von Venn-Diagrammen oder Venn-ähnlichen Diagrammen für n Objekte beschäftigen, war und ist immer noch sehr groß.

Freges graphischer Kalkül zur Urteilslogik blieb ohne großen Einfluß. Obwohl er die Urteilslogik neu inisierte, basierten die nachfolgenden Arbeiten fast nur auf linearen, algebraartigen Kalkülen.

Für die Begriffslogik entwarf Bruno v. Freytag Löringhoff in den 40er Jahren dieses Jahrhunderts einen zweidimensionalen, stark an Hasse-Diagramme oder an die heutigen semantischen Netze erinnernden Kalkül. Dabei bilden die Begriffe die Knoten, die verschiedenen Kantentypen stellen die logischen Beziehungen zwischen den Begriffen dar. Durch die Operationsregeln des Kalküls werden neue Kanten erzeugt. Unverbundene oder „nur wenig verbundene Knoten“ (zwei Knoten können durch mehrere verschiedene Kanten in Beziehung zueinander stehen) werden durch die Regeln des Kalküls miteinander verbunden und so die logischen Verhältnisse verdeutlicht.



Da sind zunächst oben von links nach rechts die acht „aristotelischen“ Urteile.

a-Urteil Alle A sind B

e-Urteil Alle A sind nicht B

o-Urteil Einige A sind nicht B

i-Urteil Einige A sind B

ä-Urteil Alles an A ist an B (Alle B sind A)

ë-Urteil Alles an A ist nicht an B

ö-Urteil Etwas an A ist nicht an B (Einige B sind nicht A)

ï-Urteil Etwas an A ist an B

Außerdem wird durch die in den Punkt einlaufenden Kanten die Spezifikation $a \sqcap b$ bzw. Generalisation $a \sqcup b$ dargestellt.

Eine umfangreichere, wenn auch nicht sehr exakte und formale Einführung in diesen begriffslogischen Kalkül bieten die Bücher [4, 5, 6].

Ein großes Problem der Begriffslogik ist, daß es heute, wie schon im Abschnitt zur Geschichte der Logik zu lesen war, eine Geisteshaltung gibt, die formalisierte Logik automatisch mit Aussagen- und Prädikatenlogik gleichsetzt. Exakte Logik könne eben nur so und nicht anders aussehen.

Auch die Vorstellung einer Logik, die keine Werte hat, ist basierend auf dieser Geisteshaltung, mehr als ungewöhnlich. Der Abschnitt 4.2 zeigt dagegen sehr wohl, daß die Begriffslogik erstens formalisierbar ist, zweitens eine ganz gewöhnliche Basis hat (Boolescher Verband) und sich drittens ohne Probleme in eine Kalkülhierarchie, welche die Aussagen- und Prädikatenlogik enthält, einordnen läßt.

Kapitel 6

Die Überwindung der graphischen Darstellung

Es ist mit Venn-Diagrammen sehr einfach möglich, Konklusionen definitiv auf FOLGEN oder NICHT-FOLGEN zu testen. Das ist eine recht brauchbare Fähigkeit, ebenso wie einige weitere Fähigkeiten, die später noch vorgestellt werden sollen. Die graphische Darstellung der Venn-Diagramme, ebenso wie die menschliche Konzentrationsfähigkeit begrenzen diese Möglichkeiten aber sehr schnell.

Zur Erinnerung:

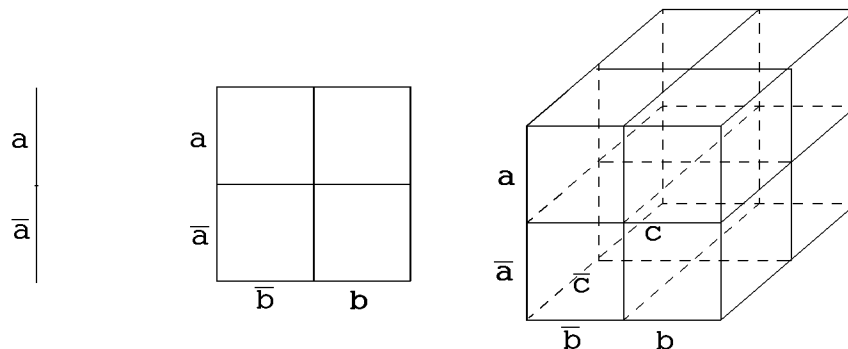
Bei der Erstellung des Diagrammes wird verlangt, daß alle möglichen Schnittflächen der auftretenden Regionen entstehen. Bei einem Grundobjekt ist das trivial, bei zweien einfach, bei dreien bereitet noch es keine ernststen Probleme, bei vierten muß man schon ein wenig aufpassen und bei fünfen funktioniert es ebenfalls noch, ist aber bereits sehr unübersichtlich. Und darüber hinaus . . .

Bei mehr als vier Grundobjekten sind die Diagramme sehr unübersichtlich und erfordern daher ein hohes Maß an Konzentration, um richtig mit ihnen arbeiten zu können.

Man könnte die Venn-Diagramme deshalb als unbrauchbar für größere Zusammenhänge betrachten. Andererseits aber ist, wie oben zu sehen war, das Eintragen der Prämissen und das Überprüfen von Konklusionen eine rein mechanische Angelegenheit und damit kein Problem für ein Computerprogramm. Man kann also erwarten, daß die Arbeit per Computer wesentlich schneller und reibungsloser verläuft, wenn es nur gelingt, die Diagramme strukturerhaltend abzubilden.

6.1 Hyperdiagramme

Betrachtet man eine Aufgabe mit n Grundobjekten in einem n -dimensionalen Raum, so ist das entstehende „Hyperdiagramm“ bei mehr als drei Grundobjekten zwar nicht mehr vorstellbar, dafür aber verhältnismäßig einfach zu handhaben. Man identifiziert den einen Teil einer Dimensionsachse mit einem Grundobjekt und den anderen Teil der Dimensionsachse mit dem entsprechenden Negat und erhält so „Koordinaten“ für jede Zelle, die ein einfaches Auffinden der gesuchten Zelle erlauben.



Die Abbildung zeigt Hyperdiagramme mit 1 bis 3 Grundobjekten. Hat man für n Objekte n Dimensionen zur Verfügung, so ist eine völlig symmetrische und gleichmäßige Darstellung möglich. Die einzelnen Zellen sind sehr einfach zu identifizieren, eine einfache Bearbeitung der Diagramme erscheint möglich, aber bei mehr als drei Grundobjekten, also bei mehr als drei Dimensionen hat man als Mensch doch Vorstellungsprobleme. Das gilt aber nicht für ein Programm. Ihrer Struktur nach entsprechen die Hyperdiagramme einem n -dimensionalen Array mit jeweils 2 Feldern pro Achse. Allerdings bieten die meisten Programmiersprachen keine Möglichkeit, ein n -dimensionales Array variabel (bez. n) im Speicher anzulegen. Eine andere Lösung ist erforderlich.

6.2 Eine Abbildung der Diagramme in eine einfache Struktur

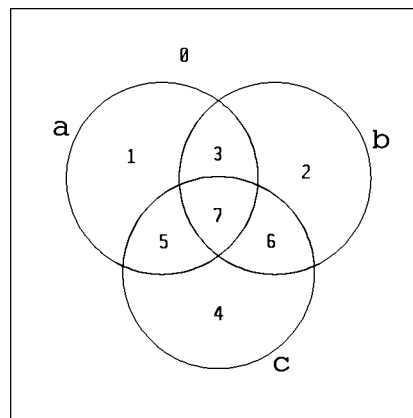
Welches ist nun eine geeignete Umsetzungsmethode eines Hyperdiagrammes für den Computer? Dazu sehen wir uns das folgende Beispiel an:

Wir verwenden ein Venn-Diagramm für 3 Grundobjekte. Dieses hat $2^3 = 8$ Zellen. Den drei Grundobjekten geben wir die Namen a , b und c . Eine Zelle wird eindeutig definiert durch die Angabe, zu welchen Grundobjekten sie gehört und zu welchen sie nicht gehört (die Minterme).

Desweiteren soll das Grundobjekt durch eine 1, sein Negat durch eine 0 gekennzeichnet werden. Das führt zu den folgenden Bezeichnungen der acht Zellen:

| | c | b | a | | |
|---|-----|-----|-----|---|---|
| $\bar{c} \sqcap \bar{b} \sqcap \bar{a}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\bar{c} \sqcap \bar{b} \sqcap a$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $\bar{c} \sqcap b \sqcap \bar{a}$ | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| $\bar{c} \sqcap b \sqcap a$ | 0 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| $c \sqcap \bar{b} \sqcap \bar{a}$ | 1 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| $c \sqcap \bar{b} \sqcap a$ | 1 | 0 | 1 | 5 | 5 |
| $c \sqcap b \sqcap \bar{a}$ | 1 | 1 | 0 | 6 | 6 |
| $c \sqcap b \sqcap a$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 7 |

Für jede der Zellen ergibt sich in diesem Beispiel eine eindeutige Ziffernkombination als Identifikation. Wenn man die Ziffernkombinationen als dreistellige Dualzahlen betrachtet, ergeben sich die Zahlen von 0 bis 7.



Bemerkung 6.1 Nun werden wir die im Beispiel realisierte Idee verallgemeinern. Dazu ist eine Ordnung der Grundobjekte notwendig. Diese kann beliebig sein, z.B. alphabetisch, muß dann aber fest sein.

Definition 6.1 Sei a_1, \dots, a_n eine geordnete Folge von n Grundobjekten. Sei X ein Minterm mit n Variablen, bestehend aus den Literalen $x_n \dots x_1$. Sei a_i das i -te Grundobjekt in der vorgegebenen Ordnung, \bar{a}_i das Komplement des i -ten Grundobjekts. Es läßt sich eine charakteristische Funktion F wie folgt definieren:

$$F_i(X) = \begin{cases} 1, & x_i = a_i \\ 0, & x_i = \bar{a}_i \end{cases}$$

Damit läßt sich eine Funktion W definieren:

$$W(X) = \sum_{i=1}^n F_i(X) \cdot 2^{i-1}$$

Satz 6.1 Die Funktionen F und W ordnen bei n Grundobjekten den Mintermen eindeutig die Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ zu.

Beweis: Sei $n = 1$. Dann gibt es zwei Minterme a und \bar{a} , die gemäß Definition 6.1 die Nummern 0 und 1 haben. Die Minterme sind damit eindeutig durch die Zahlen 0 bis $2^1 - 1 = 1$ dargestellt.

Seien nun bei n Grundobjekten die 2^n Minterme gemäß Definition 6.1 eindeutig durch die Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ dargestellt. Fügt man nun ein weiteres Grundobjekt zu der dualen Zahlenfolge $x_n \dots x_1$ hinzu, so ergeben sich aus jeder Zahlenfolge zwei neue, nämlich $0x_n \dots x_1$ und $1x_n \dots x_1$. Es ist $0x_n \dots x_1 = x_n \dots x_1$, die Zahl bleibt also erhalten. Es ist $1x_n \dots x_1 = 2^n + x_n \dots x_1$, d.h. zu jeder Zahl wird 2^n hinzuaddiert. Es gibt also keine „Kollisionen“ und auch keine „Lücke“, d.h. $n + 1$ Grundobjekte sind durch die Zahlen von 0 bis $2^{n+1} - 1$ eindeutig dargestellt. ■

Satz 6.2 Die in Definition 6.1 definierte Abbildung ist bijektiv.

Beweis: Unterscheiden sich zwei Minterme an mindestens einer Stelle (dieses sei die Stelle i), so ist deren charakteristische Funktion F an dieser Stelle entweder 0 oder 2^{i-1} . Aufgrund der binären Konstruktion der Zahlen durch die Funktion W läßt sich dieser fehlende Summand nicht durch andere Summanden kompensieren, daher sind die Bildwerte der Abbildung ebenfalls verschieden und die Abbildung ist injektiv. Da 2^n Minterme gemäß Satz 6.1 durch die Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ dargestellt werden können, ist die Abbildung auch surjektiv, also bijektiv. ■

Die Umkehrabbildung könnte z.B. wie folgt aussehen:

(mit $\&$ als bitweisem „Booleschen“ UND-Operator)

$$F_i'(W) = 2^{i-1} \& W$$

$$x_i = \begin{cases} a_i, & F_i'(W) \neq 0 \\ \bar{a}_i, & F_i'(W) = 0 \end{cases}$$

Definition 6.2 Sei B^n die Menge der Booleschen Funktionen eines Booleschen Verbandes mit n Objekten. Sei V_0^n die Menge der Zellen eines Venn-Diagrammes, welches aus einer unabhängigen Familie von n Regionen gebildet wird. Sei V^n die Potenzmenge von V_0^n . Sei M^n die Potenzmenge der Menge $\{0, \dots, 2^n - 1\}$. Wir definieren eine Abbildung $G^n : B^n \rightarrow M^n, y \mapsto G_y^n = \bigcup_{X \in y} \{W(X)\}$, die Boolesche Funktionen auf Mengen von Zahlen abbildet.

Satz 6.3 Venn-Diagramme für n Regionen und die Menge M^n mit den Operatoren \cap, \cup und $'$ sind zueinander isomorph.

Beweis: Satz 2.39 lieferte die Isomorphie zwischen Booleschen Verbänden für n Variablen und Venn-Diagrammen für n Regionen. Die Abbildung G^n ist eine isomorphe Abbildung (die Isomorphie basiert

auf der Bijektion zwischen Mintermen und den Zahlen aus Satz 6.2) zwischen Booleschen Verbänden für n Variablen und der Menge M^n . Daher sind auch Venn-Diagramme für n Regionen mit der Menge M^n isomorph. ■

Bemerkung 6.2 Sei a_k das k -te Grundobjekt. Dann kann man die zugehörige Menge von Zahlen auch durch die folgende Vorschrift gewinnen:

$$G_{a_k}^n := \bigcup_{m=0}^{2^{n-k}-1} \{m \cdot 2^k + 2^{k-1}, m \cdot 2^k + 2^{k-1} + 1, \dots, (m+1) \cdot 2^k - 1\} \quad k = \{1, \dots, n\}$$

Aus der Menge der Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ werden die Zahlen ausgewählt, die in dualer Darstellung an der k -ten Stelle eine 1 haben.

Für $k = 1$ wechseln sich 0 und 1 jeweils ab (beginnend mit 0), die Länge der 0- und 1-Blöcke ist also 1. Für jedes weitere Grundobjekt verdoppelt sich die Länge der 0- und der 1-Blöcke, die Länge ist allgemein 2^{k-1} . Die Anzahl der jeweiligen Blöcke halbiert sich bei jedem Schritt.

Es seien G_z^n und G_y^n die zwei Booleschen Funktionen z und y gemäß Definition 6.2 zugeordneten Mengen.

$$G_{z \cap y}^n = G_z^n \cap G_y^n \quad G_{z \cup y}^n = G_z^n \cup G_y^n \quad G_{\bar{z}}^n = G^n \setminus G_z^n$$

Man kann also ein Venn-Diagramm für n Grundobjekte auf die Menge der Zahlen $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ abbilden. Dabei ist jede Zahl eine eindeutige Identifikation der jeweils gemeinten Zelle im Venn-Diagramm.

Ein Venn-Diagramm für n Grundobjekte kann ganz einfach durch ein eindimensionales Array oder eine lineare Liste mit 2^n noch zu definierenden Einträgen dargestellt werden, wobei die Einträge mit 0 beginnend fortlaufend numeriert werden.

Jede Boolesche Funktion kann gemäß Satz 6.3 als eine einfache Menge von Zahlen, als eine Teilmenge der Menge $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ dargestellt werden. Hier ist eine Repräsentation als lineare Liste von Zahlen am geeignetsten. Durch einen einfachen Parser werden die Prämissen/Konklusionen gelesen und die Menge der betroffenen Zellen regelrecht ausgerechnet. Dazu sind die „Booleschen“ Operationen UND, ODER und NICHT als Mengenoperationen „Schnitt“, „Vereinigung“ und „Komplementbildung“ auf den linearen Listen realisiert.

Das Grundobjekt „ a “ wird im Programm also dargestellt durch eine Liste der Zellennummern, die es im Venn-Diagramm belegt. Im obigen Beispiel für drei Grundobjekte sind das alle die Nummern, die in der dualen Darstellung eine 1 ganz rechts haben, also die Zahlen 1, 3, 5 und 7. Das Grundobjekt „ b “ des Beispiels besteht aus den Zahlen 2, 3, 6 und 7. Das Objekt „ a UND b “ entsteht dann als Schnittmenge der Listen der Grundobjekte „ a “ und „ b “; es entspricht also einer Liste, welche die Nummern 3 und 7 enthält.

6.3 Komplexitätsüberlegungen

Bevor die in Venn-Diagrammen üblichen Operationen auf Algorithmen abgebildet werden, sind einige grundsätzliche Komplexitätsüberlegungen sinnvoll.

Die den Algorithmen zugrundeliegende Datenstruktur ist ein Array oder eine lineare Liste mit der Größe 2^n , wenn n die Anzahl der betrachteten Objekte ist. Obwohl die Algorithmen mit einer Laufzeit von $O(N)$ über der Eingabemenge N auskommen, so haben sie doch letztlich exponentielle Laufzeit, denn die Eingabemenge steigt exponentiell an bezogen auf n . Die Laufzeit ist korrekt angegeben mit $O(2^n)$. Das ist kein gutes Ergebnis, aber letztlich war nichts anderes zu erwarten, denn logische Probleme sind bekannt für exponentielle Laufzeiten.

Für den zweiwertigen Fall gilt: Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik ist NP-vollständig. Das Folgerungsproblem der Aussagenlogik ist coNP-vollständig, da auf Unerfüllbarkeit geprüft werden muß. Für die Aussagenlogik gibt es Algorithmen, die das Folgerungsproblem mit einer etwas geringeren Laufzeit als $O(2^n)$ lösen.

Die zweiwertigen Booleschen Verbände sind ein Spezialfall der allgemeinen Booleschen Verbände, besonders auch in bezug auf das Folgerungsproblem. Die Venn-Diagramme repräsentieren allgemeine Boolesche Verbände, sind mit zweiwertigen sozusagen etwas unterfordert. Daher kann man für diesen Fall nicht erwarten, daß die Diagramme mit speziell auf die Aussagenlogik zugeschnittenen Algorithmen konkurrieren können.

6.4 Übertragung der Operationen

Sei n die Anzahl der Grundobjekte, w die Anzahl der allgemeinen Prämissen, v die Anzahl der partikulären Prämissen. Dann bestehen die 2^n Einträge des Arrays oder der linearen Liste, die das Venn-Diagramm repräsentiert, jeweils aus Bit-Vektoren der Länge $w + v$.

$$V_j = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_w \ x_{w+1} \ \dots \ x_{w+v}) \quad j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$$

x_i ist dabei ein Flag, welches im gesetzten Zustand, abhängig von der Position im Bit-Vektor entweder eine Schraffierung oder eine Sternung anzeigt.

Auf den Vektoren sind bitweise „Boolesche“ UND-, ODER- und NICHT-Operationen definiert. V_M ist der 1-Vektor, V_W ist der 0-Vektor. V_{aM} ist der Vektor, in dem nur die ersten w Flags gesetzt sind. V_{pM} ist der Vektor, in dem nur die letzten v Flags gesetzt sind.

6.4.1 Streichen

Das Schraffieren einer Zelle im Venn-Diagramm entspricht dem Setzen eines „Schraffierungsflags“ in dem Eintrag mit der der Zelle entsprechenden Nummer.

$a \sqsubseteq b$ entspricht $a \cap \bar{b} = 0$, d.h. $a \cap \bar{b}$ ist zu schraffieren, d.h. in den Einträgen mit den Nummern $G_a^n \cap G_b^n$ wird das entsprechende Schraffierungsflag gesetzt.

$a \sqsubseteq \bar{b}$ entspricht $a \cap b = 0$, d.h. $a \cap b$ ist zu schraffieren, d.h. in den Einträgen mit den Nummern $G_a^n \cap G_b^n$ wird das entsprechende Schraffierungsflag gesetzt.

$\bar{a} \sqsubseteq b$ entspricht $\bar{a} \cap \bar{b} = 0$, d.h. $\bar{a} \cap \bar{b}$ ist zu schraffieren, d.h. in den Einträgen mit den Nummern $G_{\bar{a}}^n \cap G_{\bar{b}}^n$ wird das entsprechende Schraffierungsflag gesetzt.

$\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$ entspricht $\bar{a} \cap b = 0$, d.h. $\bar{a} \cap b$ ist zu schraffieren, d.h. in den Einträgen mit den Nummern $G_{\bar{a}}^n \cap G_b^n$ wird das entsprechende Schraffierungsflag gesetzt.

Für jede Prämisse, die eine Halbordnung enthält, ist in den Einträgen des Venn-Diagramms ein eigenes Schraffierungsflag vorhanden. Dieses ist zunächst nicht notwendig, wird uns später aber erlauben, festzustellen, welche Prämisse(n) eine Zelle schraffiert hat(haben).

Der Aufwand ist $w \cdot O(N)$, also $O(N)$ wenn N die Größe der Liste (im folgenden Eingabemenge genannt) ist, die das Venn-Diagramm repräsentiert.

6.4.2 „Sternen“

Das Sternieren einer Zelle im Venn-Diagramm entspricht dem Setzen eines „Sternungsflags“ in dem Eintrag mit der der Zelle entsprechenden Nummer.

$a \not\sqsubseteq b$ entspricht $a \cap \bar{b} \neq 0$, d.h. $a \cap \bar{b}$ ist zu sternieren, d.h. in den Einträgen mit den Nummern $G_a^n \cap G_b^n$ wird das entsprechende Sternungsflag gesetzt.

$a \not\sqsubseteq \bar{b}$ entspricht $a \cap b \neq 0$, d.h. $a \cap b$ ist zu sternieren, d.h. in den Einträgen mit den Nummern $G_a^n \cap G_b^n$ wird das entsprechende Sternungsflag gesetzt.

$\bar{a} \not\sqsubseteq b$ entspricht $\bar{a} \cap \bar{b} \neq 0$, d.h. $\bar{a} \cap \bar{b}$ ist zu sternieren, d.h. in den Einträgen mit den Nummern $G_{\bar{a}}^n \cap G_{\bar{b}}^n$ wird das entsprechende Sternungsflag gesetzt.

$\bar{a} \not\sqsubseteq \bar{b}$ entspricht $\bar{a} \cap b \neq 0$, d.h. $\bar{a} \cap b$ ist zu sternieren, d.h. in den Einträgen mit den Nummern $G_{\bar{a}}^n \cap G_b^n$ wird das entsprechende Sternungsflag gesetzt.

Bei der Sternung ist es ganz klar, daß jede Prämisse, die eine verneinte Halbordnung enthält, in den Einträgen des Venn-Diagramms ein eigenes Sternungsflag haben muß, denn man muß ja die Sternsorten für den Konklusionentest unterscheiden können.

Der Aufwand ist $v \cdot O(N)$, also $O(N)$ wenn N die Größe der Eingabemenge ist.

6.4.3 Testen von vermuteten Folgerungen

Der Konklusionentest ist nach den obigen Vorbereitungen natürlich ganz einfach:

1. Die vermutete Folgerung ist eine Halbordnung. Dann wird zunächst berechnet, welche Zellen des Diagrammes schraffiert sein müssten. Danach wird geprüft, ob in jedem der betroffenen Einträge mindestens ein Schraffierungsflag gesetzt ist. Ist dieses der Fall, so FOLGT die vermutete Folgerung, sonst FOLGT sie NICHT.

Sei N die Anzahl der abzutestenden Zellen. Dann ist der Laufzeitaufwand $O(N)$.

2. Die vermutete Folgerung ist eine negierte Halbordnung. Dann muß unter Umständen für jede Sternsorte geprüft werden, ob mindestens eine der betroffenen Zellen mit einem Sternungsflag dieser Sternsorte versehen ist, und diese Sternsorte außerhalb der durch die vermutete Folgerung betroffenen Zellen nicht vorkommt, bzw. falls sie vorkommt, daß diese Zellen auch schraffiert sind. Ist dieses der Fall, dann FOLGT die vermutete Folgerung. Kann keine der Sternsorten diese Bedingungen erfüllen, so FOLGT die vermutete Folgerung NICHT.

Da schlimmstenfalls jede Zelle des Diagrammes für jede partikuläre Prämisse getestet werden muß, ist die Laufzeit $v \cdot O(N) = O(N)$, wobei v die Anzahl der partikulären Prämissen ist.

Kapitel 7

Erweiterungen

Die bisher vorgestellten Operationen mit Venn-Diagrammen sind die bekannten Standardoperationen. Durch die Bearbeitung von Venn-Diagrammen in einer Programm-Repräsentation haben sich aber noch weitere Anwendungsmöglichkeiten erschlossen. Diese sollen nun im einzelnen vorgestellt werden.

7.1 Integration von Individualbegriffen

Die bisher betrachteten Begriffe in der Begriffslogik waren Allgemeinbegriffe. Es ist jedoch möglich noch weitere spezielle Begriffstypen einzuführen. Der bekannteste Typ ist der Individualbegriff. Er repräsentiert Individuen in der Begriffslogik. Was ist überhaupt ein Individuum ?

Ein Individuum, sei es nun als existierend gedacht oder aber real existierend, ist etwas einzigartiges, etwas Unteilbares. Es ist genau eines und es existiert in einem wie auch immer gearteten Sinne. Individualbegriffe machen die Individuen der Begriffslogik zugänglich.

Welche Beziehungen bestehen zwischen einem Individuum \mathcal{A} und dem es repräsentierenden Individualbegriff a^I ? Wenn ein Individuum *teilhat* (\ll) an einem Allgemeinbegriff (teilhaben in dem Sinne, daß die Eigenschaften, die durch den Allgemeinbegriff beschrieben werden, auf das Individuum zutreffen), dann ist der dem Individuum zugeordnete Individualbegriff Art des Allgemeinbegriffes, und umgekehrt:

$$\mathcal{A} \ll b \dashv\vdash a^I \leq b$$

Hieraus läßt sich z.B. folgern: $\mathcal{A} \ll a^I$, aber auch $\mathcal{A} \ll b, b \leq c \vdash \mathcal{A} \ll c$. Desweiteren ist jedem Individuum genau ein Individualbegriff zugeordnet, d.h. wenn zwei verschiedene Variablen für dasselbe Individuen vorhanden sind, die Variablen also in diesem Sinne äquivalent (\equiv) sind, dann haben die Individuen jeweils an dem Individualbegriff des anderen Individuums teil:

$$\mathcal{A} \ll b^I \dashv\vdash \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

Hieraus folgt dann z.B.: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \dashv\vdash a^I = b^I$. Die Teilhabebeziehung \ll zwischen Individuum und Begriff, die durch die obigen Regeln definiert wird, ist nicht die Art-Gattungs-Beziehung. Sie ist etwa vergleichbar mit der Elementbeziehung der Mengenlehre im Vergleich zur Teilmengenbeziehung.

Die Deklaration eines Begriffes als ein Individualbegriff bewirkt also zum einen, daß man mehr über ihn weiß als über andere Begriffe, nämlich daß er existiert, logisch betrachtet also zumindest widerspruchsfrei ist, was man durch $a^I \not\leq 0$ ausdrücken kann. Zum anderen kann man zusätzliche Regeln anwenden, die seine Unteilbarkeit bewirken. Ein Individualbegriff ist z.B. oberer Nachbar des widersprüchlichen Begriffes, d.h. ist b ein widerspruchsfreier Begriff, der Art des Individuums a^I ist, so ist a^I auch Art von b .

Das Venn-Diagramm kennt keine Individualbegriffe oder Atome, wie sie allgemein in der Verbandstheorie genannt werden. Will man diese trotzdem berücksichtigen, so muß man neben der jeweils zusätzlichen Prämisse

$$(I1) \vdash a^I \not\leq 0$$

die sichere Funktionalität der Venn-Diagramme ein wenig verlassen, denn man muß zusätzlich eine Regel anwenden:

$$(I2) a^I \not\leq b \vdash a^I \cdot b \leq 0$$

Nach dem Eintrag aller anderen Prämissen werden alle die Zellen des Individualbegriffes gestrichen, die nicht alle „Sternsorten“ enthalten, die nur im Individualbegriff vorkommen. Dadurch wird die Individualität hergestellt. Dieses entspricht zunächst nicht genau der obigen Unteilbarkeits-Definition der Individualität, die etwa so ausgedrückt werden könnte:

$$(I3) b \leq a^I, b \not\leq 0 \vdash a^I \leq b$$

Auf der Basis der Begriffslogik zuzüglich (I1) sind (I2) und (I3) jedoch äquivalent.

$$\frac{\frac{b \leq a^I \quad b \not\leq 0}{a^I \cdot b \not\leq 0} \text{ Satz 2.35}}{a^I \leq b} \text{ Kontrap. von (I2)}$$

$$\frac{\frac{a^I \cdot \bar{b} \leq a^I \quad \frac{a^I \not\leq b}{a^I \cdot \bar{b} \not\leq 0} \text{ Kontrap. von Satz 4.5}}{a^I \leq a^I \cdot \bar{b}} \text{ (I3)} \quad \frac{a^I \cdot \bar{b} \leq \bar{b}}{a^I \cdot \bar{b} \leq \bar{b}} \text{ A2}}{a^I \leq \bar{b}} \text{ A6}$$

$$\frac{a^I \leq \bar{b}}{a^I \cdot b \leq 0} \text{ Satz 4.5}$$

Statt (I3) kann also auch (I2) verwendet werden, was im Venn-Programm geschieht. Die Deklaration eines Individualbegriffes bewirkt während des Programmablaufs also zweierlei: Einerseits wird eine zusätzliche partikuläre Prämisse zu den bisherigen Prämissen hinzugefügt, nämlich $a^I \not\leq 0$. Andererseits wird auch ein Schraffierungsflag reserviert für Schraffierungen, die möglicherweise durch (I2) bewirkt werden könnten.

Die Regeln (I1) und (I2) können ihrerseits durch die folgende Regel ersetzt werden:

$$a^I \not\leq b \dashv\vdash a^I \cdot b \leq 0$$

(I2) ist Teil dieser Regel und (I1) erhält man einfach, indem man b durch 0 ersetzt. Umgekehrt erhält man aus $a^I \cdot b \leq 0$ und $a^I \not\leq 0$ ganz einfach durch Kontraposition $a^I \not\leq b$.

Durch die Anwendung der zusätzlichen Regel (I2) geht die Reihenfolgeunabhängigkeit der Prämissen (in diesem Fall der Individualbegriffsdeklarationen) verloren, die bisher die Venn-Diagramme charakterisierte. Um dieses zu kompensieren wird die Prozedur so oft angewendet, bis keine Änderungen (weitere Streichungen) mehr auftreten, höchstens jedoch i mal (i ist die Anzahl der vorkommenden Individualbegriffe), denn dann kann es keine Änderungen mehr geben.

Der Aufwand ist $i^2 \cdot 2 \cdot O(N)$, also $O(N)$. Der Konklusionentest für eine Individualbegriffsdeklaration läuft darauf hinaus, daß auf die totale Identität mit einer Individualbegriffsdeklaration aus den Prämissen geprüft wird.

7.2 Der Rückschluß auf verborgene Prämissen

Gelegentlich begegnet man der Behauptung, aus gewissen Voraussetzungen folge logisch ein bestimmter Schlußsatz, muß dann aber feststellen, daß der beanspruchte Folgerungszusammenhang tatsächlich gar nicht besteht. So kann es einem etwa bei Diskussionen ergehen, bei der Prüfung juristischer Entscheidungsbeurteilungen, bei der Analyse scholastischer Argumentationen, aber auch bei dem Studium mathematischer Beweise.

Da man sich im Alltag – auch im wissenschaftlichen – fragmentarisch auszudrücken pflegt, also selbstverständlich erscheinende Voraussetzungen und Beweisschritte einfach wegläßt, gibt diese Beobachtung nicht unbedingt Anlaß zur Beunruhigung. Unter Umständen kann es jedoch interessant sein, einen solchen lückenhaften Gedankengang, ein sogenanntes Enthymem, zu einem vollständigen Beweis zu ergänzen, d.h. hier: weitere Voraussetzungen aufzusuchen, mit deren und der ursprünglichen Prämissen Hilfe die betreffende Konklusion dann tatsächlich beweisbar wird.

Dieses Vorgehen nennt man den „Rückschluß auf verborgene bzw. verschwiegene Prämissen“.

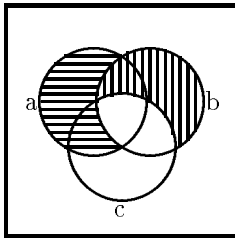
Dabei wird man sich nicht mit irgendeinem beliebigen System von Prämissen begnügen, die das Gewünschte leisten, sondern wird nach logisch möglichst schwachen Annahmen suchen, also solchen, die in einem gewissen Sinne „minimal“ sind. Zur Einführung diene ein Beispiel aus der Syllogistik, dem der Modus Barbara zugrundeliegt.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Alle } a \text{ sind } b, & X & \vdash \quad \text{Alle } a \text{ sind } c \\
 a \text{ a } b, & X & \vdash \quad a \text{ a } c \\
 a \leq b, & X & \vdash \quad a \leq c
 \end{array}$$

Hier lautet eine naheliegende Lösung X_{syll} :

$$X_{\text{syll}} : b \leq c$$

Nach (A6) gilt: $a \leq b, b \leq c \vdash a \leq c$. Aber ist diese Lösung irgendwie minimal? Im Venn-Diagramm sieht das so aus:



$$\begin{array}{l}
 = a \leq b \\
 \parallel b \leq c
 \end{array}$$

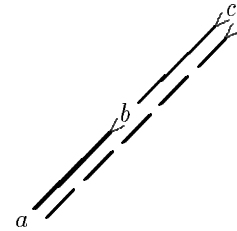
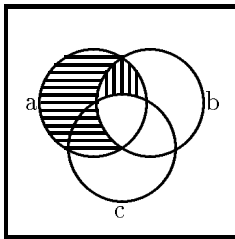


Abb. 1

Aus dem Diagramm entnimmt man ohne weiteres, daß die naheliegende Beispiel-Lösung sozusagen zuviel liefert. Um $a \leq c$ aus $a \leq b$ zu gewinnen, genügt bereits folgende Schraffierung:



$$\begin{array}{l}
 = a \leq b \\
 \parallel a \cdot b \leq c
 \end{array}$$

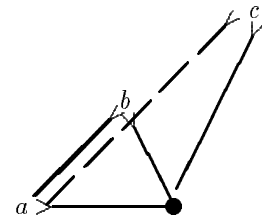
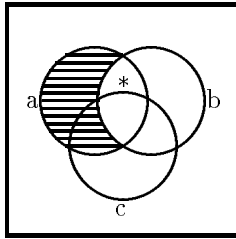


Abb. 2

Die Lösung $a \cdot b \leq c$ ist – wie auch aus dem Diagramm unmittelbar ersichtlich – echt schwächer als die Beispiel-Lösung, denn aus $b \leq c$ folgt $a \cdot b \leq c$, aber nicht umgekehrt. Im anschaulichen, durch das Venn-Diagramm gegebenen Sinne ist sie auch am schwächsten, denn für den Fall, daß $a \cdot b \leq c$ nicht, also $a \cdot b \not\leq c$ gilt, ist $a \leq c$ aus $a \leq b$ nicht zu beweisen (siehe Abb. 3).

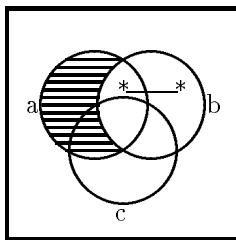


$$* \quad a \cdot b \not\leq c$$

$$= \quad a \leq b$$

Abb. 3

Dies gilt nicht für die syllogistische Lösung $b \leq c$, was man sich ebenfalls leicht am Venn-Diagramm klar macht. Denn angenommen, $b \leq c$ gelte nicht, also $b \not\leq c$, so ist diese Lage immer noch mit $a \cdot b \leq c$ verträglich:



$$* \text{---} * \quad (, * \text{ oder } *) \quad b \not\leq c$$

Abb. 4

Definition 7.1 (Venn-Minimalität) Als „Venn-minimal“ wollen wir im folgenden eine Lösung des Rückschlußproblems bezeichnen, die sich durch Betrachtung eines zugehörigen Venn-Diagramms als zur Gewinnung der Konklusion unerläßlich erweist.

Für eine universelle Konklusion gilt also: Venn-minimale Lösung des Rückschlußproblems ist die Menge der durch die Konklusion schraffierten Zellen ohne die Zellen, die durch die Prämissen schraffiert wurden.

Der Aufwand ist $O(N)$ für N als Anzahl der betroffenen Zellen.

Für partikuläre Konklusionen gilt: Für jede Sternsorte, die mindestens einen unschraffierten Stern unter den Zellen der Konklusion hat, ist eine minimale Lösung des Problems die Schraffur der noch unschraffierten außerhalb liegenden Sterne der jeweiligen Sternsorte.

Gibt es keine Sternsorte, die einen unschraffierten Stern unter den Zellen der Konklusion hat, so ist eine minimale Lösung des Rückschlußproblems die Einführung einer neuen Sternsorte, die alle Zellen der Konklusion abdeckt, und auch noch alle schraffierten Zellen (um möglichst schwach zu sein).

Schlimmstenfalls ist der Aufwand $v \cdot 2 \cdot O(N)$, also $O(N)$. Zur Veranschaulichung betrachte man das Beispiel aus Abschnitt 3.3, das jeden der obigen Fälle enthält.

7.2.1 Der syllogistische Rückschluß

Im Rahmen der aristotelischen Syllogistik hat v. Freytag Löringhoff das Rückschlußproblem behandelt. Siehe dazu [4, 5, 6]. Die Ausgangslage ist hier:

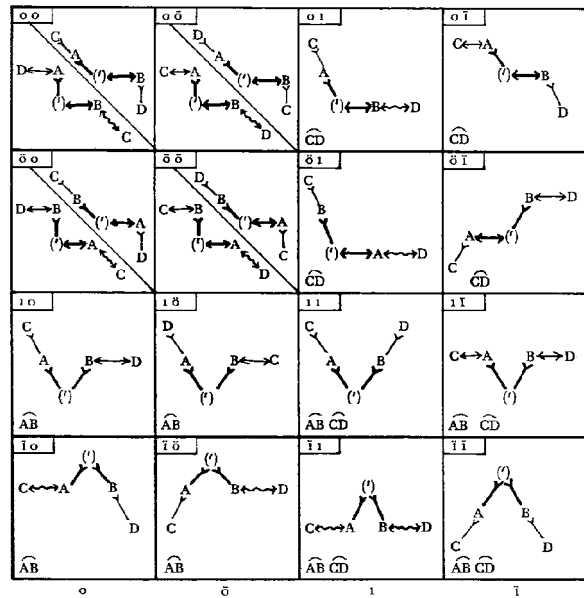
$$1R_{12}, X \vdash 3R_{24}$$

Die Variablen 1, 2, 3, 4 stehen für beliebige Begriffsausdrücke; R_1, R_2 für beliebige der syllogistischen Relationen a, e, i, o (bzw. auch noch ä, ë, ï, ö, sofern man alle möglichen (einfachen) Begriffsbeziehungen ins Spiel bringen, und keine Termnegation benutzen will). Die Lösung darf die Variablen höchstens negiert, aber keine anderen Operationszeichen enthalten.

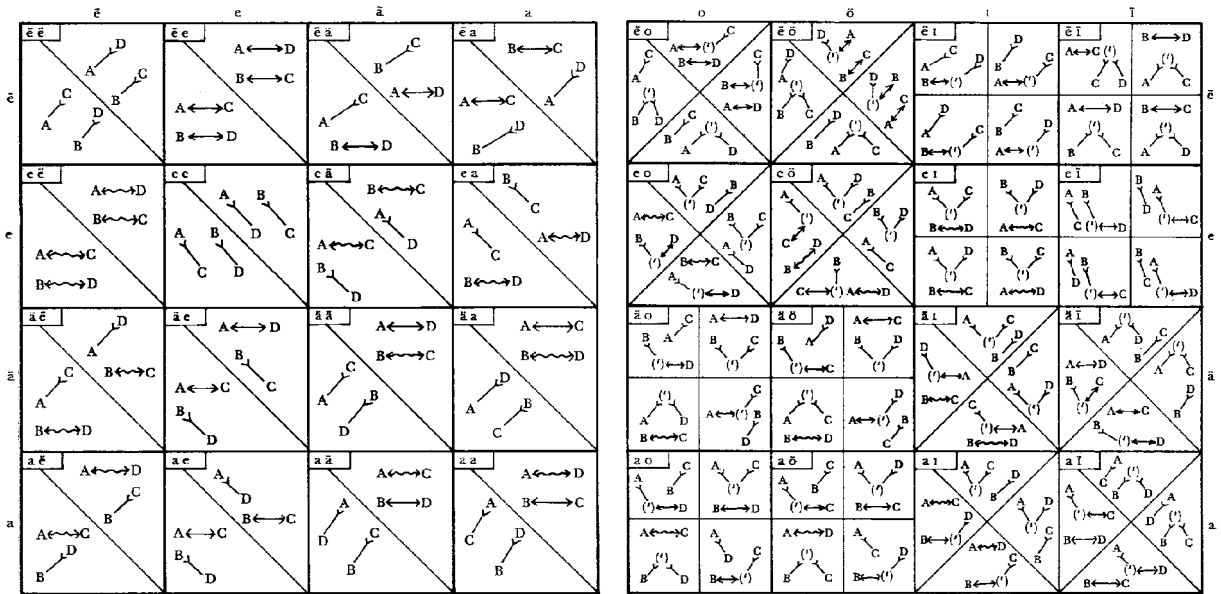
Man kann sich nun überlegen, wie man die jeweiligen Schlüsse in jedem der sich kombinatorisch ergebenden Fälle vervollständigen kann. Dabei sollen von Anfang an nur „syllogistisch minimale“ Lösungen in Betracht gezogen werden.

Die folgende Tabelle stellt ein Ergebnis dieser Bemühungen dar. Die Hypothese ist fett gezeichnet, die verborgenen Prämissen normal. Ein Bogen über zwei Begriffen bedeutet die Vertauschbarkeit beider Begriffe und damit eine weitere Lösung. Die Tabelle ist in vier Quadranten unterteilt, der vierte fehlt allerdings, da es hier keine Lösungen gibt.

| | ë | e | ä | a | ö | ë | i | ï |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| e | | | | | | | | |
| e | | | | | | | | |
| ä | | | | | | | | |
| a | | | | | | | | |



Die folgende Tabelle stellt noch einmal ausschließlich die Lösungen dar:



Die Tabellen stammen aus [6].

Fragen der Form $1R_12, 3R_24, X \vdash 5R_36$ bewirken bereits einen erheblichen Anstieg der Lösungsmöglichkeiten, noch mehr Prämissen führen zu einem immer stärkeren Anstieg der Zahl der Lösungsmöglichkeiten. Die Tabellen würden bald Bücherregale füllen. Dieses Problem läßt sich aber mit Hilfe eines Computerprogrammes recht einfach lösen. Dabei werden im Dialog mögliche verborgene Prämissen akzeptiert oder verworfen, und so der Lösungsraum erheblich eingeschränkt. Siehe dazu [6] und [7], welches auch eine Programmdiskette enthält.

7.2.1.1 Beispiele

Jemand sagt:

Weil alle Schlemmer Verschwender sind, sind einige Spiesser nicht zufrieden.

Aus welchen zusätzlichen Prämissen könnte dieser Mensch geschlossen haben, wenn er richtig geschlossen und nicht nur einfach so dahergeredet hat ? Die syllogistisch minimalen Lösungen sind, wie man aus den obigen Tabellen ablesen kann:

1. Einige Schlemmer sind Spiesser
 Kein Verschwender ist zufrieden
2. Einige Schlemmer sind nicht zufrieden
 Alle Verschwender sind Spiesser

3. Einige Spiesser sind nicht Verschwender
Alle zufrieden sind Spiesser

4. Etwas an Verschwender ist an zufrieden
Nichts an Schlemmer ist an Spiesser

Die ersten beiden Lösungssysteme scheinen einigermaßen brauchbar, alle anderen sind ziemlich unsinnig. Die Venn-minimale Lösung ist dagegen:

- Einige (Schlemmer UND NICHT- Verschwender) ODER (Spiesser UND NICHT- zufrieden) sind nicht W

Das sieht komplizierter aus als die syllogistisch minimale Lösung, ist aber exakt das, was als Prämisse fehlt. Jede beliebige, vielleicht schöner aussehende syllogistisch minimale Lösung hat mindestens die Venn-minimale Lösung zur Folge. Ein anderes Beispiel:

Jemand behauptet:

Weil alle Säugetiere Lebewesen sind, sind alle Affen braun, obwohl es Lebewesen gibt, die weder braun noch Säugetiere sind !

Auf welchen versteckten Prämissen könnte diese Behauptung beruhen ?

Die syllogistisch minimalen Lösungen sind (nach obigen Tabellen) die folgenden, wobei die angehängte partikuläre Bedingung aufgrund des starren Schemas überhaupt nicht mit betrachtet werden kann:

1. Alle Affen sind Säugetiere
Alle Lebewesen sind braun
2. Alle Affen sind nicht Lebewesen
Nichts an Säugetiere ist an braun

Für dieses Beispiel erweisen sich die syllogistisch minimalen Lösungen als zu stark. Nicht nur das keines der beiden Lösungssysteme akzeptabel erscheint, sie widersprechen in jedem Fall auch der mit „obwohl“ angehängten zusätzlichen partikulären Prämisse. Die Venn-minimale Lösung ist:

- Alle Affen sind Säugetiere ODER braun
Alle Lebewesen UND Affen sind braun

Diese Lösung widerspricht der partikulären Prämisse nicht. Das kann man einfach in einem Venn-Diagramm nachprüfen. Außerdem erscheint die Venn-minimale Lösung zumindest akzeptabler als die syllogistisch minimalen.

7.2.1.2 Bewertung

v. Freytag Löringhoffs Rückschluß ist relativ einfach anwendbar, sofern man die Tabellen verfügbar hat, oder aber in Besitz des Computerprogrammes dazu ist. Allerdings ist die Annahme, nämlich daß nur die in Prämissen und Hypothese vorkommenden Begriffe für die Lösung in Betracht gezogen werden sollen (und keine abgeleiteten), zu speziell. Die gebotenen Lösungen sind daher i.a. nicht „minimal“ bezogen auf Boolesche Verbände. D.h., kann man mindestens eine der angebotenen Lösungen akzeptieren, so kann man den Schluß geeignet vervollständigen, im anderen Fall weiß man nichts, weil die gebotenen Lösungen nicht zwingend erfüllt sein müssen. Dieser Umstand macht den syllogistisch minimalen Rückschluß für den eigentlich interessanten Fall praktisch wenig anwendbar.

7.2.2 Der allgemeine minimale Rückschluß

Von Johann-Michael von Petzinger gibt es ein aus dem Jahr 1978 stammendes, bis heute leider unveröffentlichtes Papier [9] zur Theorie des allgemeinen minimalen Rückschlusses auf verborgene Prämissen. Die hier dargestellte Theorie, sowie die Einführung in die Rückschlußproblematik, sind im wesentlichen eine verkürzte und leicht modifizierte Version des eben erwähnten Artikels, welche im Rahmen einer langjährigen engen Zusammenarbeit mit dem obigen Autor entstanden ist.

7.2.2.1 Theorie des allgemeinen minimalen Rückschlusses

Gegeben sei ein beliebiger Kalkül K sowie die Tatsache bzw. die Behauptung, daß aus einem System von Kalkülausdrücken A zusammen mit einem weiteren solchen System X ein anderes System von Ausdrücken B beweisbar ist; in Zeichen:

$$A, X \vdash_K B^1$$

Im einfachsten Fall bestehen die Systeme A und B jeweils nur aus einem einzigen Ausdruck.

Hierbei seien A und B bekannt, X sei „unbekannt“ und damit „gesucht“. B sollte – von trivialen Sonderfällen abgesehen – nicht aus X alleine folgen, d.h. zur Ableitung von B sollte A i.a. tatsächlich mitbenutzt werden². Eine Möglichkeit bestünde darin, „minimal (schlechthin)“ eine Lösung zu nennen, die relativ zum bekannten Prämissensystem A bzgl. der Ableitbarkeitsbeziehung „ \vdash “ schwächer ist als alle anderen Lösungen. Wir definieren daher folgendermaßen:

Definition 7.2 *Es gelte:*

¹Der Index K kann fehlen, wenn klar ist, um welchen Kalkül es sich handelt, oder wenn von beliebigen Kalkülen die Rede ist.

²Damit ist verträglich, daß eine minimale Lösung X_m , aus der allein im allgemeinen Falle die Konklusion nicht folgt, sich im besonderen als mit B äquivalent erweist; womit sich zugleich die Aufgabe stellt, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß dieser Fall eintritt.

(a) „ X ist Lösung des Rückschlußproblems (relativ zu A, B und dem Kalkül K)“, genau dann wenn gilt:
 $A, X \vdash_K B$.

(„ B ist aus A und X im Kalkül K beweisbar“)

(b) „ X ist minimal“, genau wenn gilt:

Für alle Y : Wenn $A, Y \vdash_K B$, dann $A, Y \vdash_K A, X$.

(„Alle Lösungen Y haben zusammen mit A im Kalkül K A und X zur Folge“)

Satz 7.1 Die Bedingung aus Definition 7.2(b) ist vor dem Hintergrund von Definition 7.2(a) äquivalent mit einer einfacher formulierten: $A, B \vdash_K X$.

Beweis: Der Äquivalenzbeweis gelingt unter Verwendung folgender Axiome für „ \vdash “, sowie einer quasi aussagen- und prädikatenlogischen Einbettung:

$$1. A, B \vdash A$$

$$A, B \vdash B$$

$$2. \text{ Wenn } A \vdash B \text{ und } B \vdash C, \text{ dann } A \vdash C.$$

$$3. \text{ Wenn } A \vdash B \text{ und } A \vdash C, \text{ dann } A \vdash B, C.$$

A, B, C sind (eventuell leere) Systeme von Kalkül-Ausdrücken.

Die eine Richtung der zu beweisenden Äquivalenz erhält man ohne weiteres durch Anwendung der Minimalitätsdefinition („Für alle Y : ...“) auf B .

$$\frac{\frac{A, Y \vdash A, X}{A, B \vdash A, X} \quad A, X \vdash X}{A, B \vdash X}$$

Die andere Richtung ist ebenfalls einfach: Sei Y eine beliebige Lösung.

$$\frac{\frac{A, Y \vdash A \quad A, Y \vdash B}{A, Y \vdash A, B} \quad \frac{A, B \vdash A \quad A, B \vdash X}{A, B \vdash A, X}}{A, Y \vdash A, X}$$

■

Definition 7.3 (minimale Lösung) „ X ist minimale Lösung des Rückschlußproblems (relativ zu A, B, K)“, genau dann wenn gilt: $A, X \vdash_K B$ und $A, B \vdash_K X$, d.h. wenn X Lösung und minimal ist.

Satz 7.2 Gibt es mehrere minimale Lösungen für ein Rückschlußproblem $A, X \vdash B$, so sind diese Lösungen vor dem Hintergrund des Prämissensystems A identisch.

Beweis: Seien Y und Z zwei minimale Lösungen für ein Rückschlußproblem $A, X \vdash B$ mit $X = Z$ oder $X = Y$. Dann gilt nach Definition 7.3: $A, Y \vdash B$; $A, Z \vdash B$; $A, B \vdash Y$ und $A, B \vdash Z$. Es ist dann zu zeigen: $A, Y \dashv\vdash A, Z$.

$$\frac{\frac{A, Y \vdash A \quad A, Y \vdash B}{A, Y \vdash A, B} \quad \frac{A, B \vdash A \quad A, B \vdash Z}{A, B \vdash A, Z}}{A, Y \vdash A, Z}$$

$$\frac{\frac{A, Z \vdash A \quad A, Z \vdash B}{A, Z \vdash A, B} \quad \frac{A, B \vdash A \quad A, B \vdash Y}{A, B \vdash A, Y}}{A, Z \vdash A, Y}$$

■

7.2.2.2 Minimaler Rückschluß im Kalkül BL^+

Wir betrachten nun die vier möglichen Fälle³, bei denen als bekannt genau eine Prämisse und eine Konklusion der Gestalt $x \leq y$ oder $x \not\leq y$ auftreten. Ebenso besitzen die syllogistischen Lösungen (X_s^1, X_s^2 etc.) und die minimalen (X_m) diese Gestalt und erfüllen die Bedingung, daß in x und y kein Beziehungszeichen, also \leq oder $=$, enthalten ist, sofern dies für a, b, c, d gilt.

1 aa $a \leq b, X \vdash c \leq d$

$$\begin{array}{l} X_s^1: c \leq a, b \leq d \\ X_s^2: 1 \leq a + d, b \cdot c \leq 0^4 \\ X_m: c \leq a + d, b \cdot c \leq d^5 \end{array}$$

2 ao $a \leq b, X \vdash c \not\leq d$

$$\begin{array}{l} X_s^1: a \not\leq d, b \leq c \\ X_s^2: a \cdot c \not\leq 0, b \cdot d \leq 0 \\ X_s^3: 1 \leq a + c, 1 \not\leq b + d \\ X_s^4: d \leq a, c \not\leq b \\ X_m: (a \cdot \bar{b}) + (c \cdot \bar{d}) \not\leq 0 \end{array}$$

3 oa $a \not\leq b, X \vdash c \leq d$ Hier scheint es keine Lösung zu geben⁶.

4 oo $a \not\leq b, X \vdash c \not\leq d$

$$\begin{array}{l} X_s^1: a \leq c, d \leq b \\ X_s^2: a \cdot d \leq 0, 1 \leq b + c \\ X^*: a \leq b + c, a \cdot d \leq b \end{array}$$

Da sich unverneinte wie verneinte Unterordnungen $a \leq b$ bzw. $a \not\leq b$ jeweils in äquivalente Null-Unterordnungen $a \cdot \bar{b} \leq 0$ bzw. $a \cdot \bar{b} \not\leq 0$ umformen lassen, reduzieren sich die Fälle 1 – 4 auf folgende (mit r für $a \cdot \bar{b}$ und s für $c \cdot \bar{d}$):

³Da man im Kalkül BL^+ über Termnegation verfügt und daher alle syllogistischen Relationen $\bar{a}, e, \dots, \bar{o}$ ausdrücken kann, sind durch die Fälle 1 – 4 alle hier in Frage kommenden Möglichkeiten erschöpft.

⁴Dies entspricht $\bar{a} \bar{e} d, b e c$. Da die Syllogistik im klassischen Sinne weder 0 noch 1 kennt, sollte man vielleicht lieber $\bar{a} \leq d$ und $b \leq \bar{c}$ o.ä. schreiben. Wir bevorzugen i.a. die termnegationsfreie Schreibweise oder eine solche, die den Zusammenhang von syllogistischer und minimaler Lösung zu verdeutlichen geeignet erscheint.

⁵Diese Lösung gilt auch schon für distributive Verbände bzw. Begriffslogiken. Distributivität ist aber wohl erforderlich, da man zum bequemen Nachweis der Lösungseigenschaft die sog. Schnittregel (vgl. [20]) zu benötigen scheint.

⁶Abgesehen von der trivialen Lösung $X = B$, hier also $X_m := c \leq d$. $X_m = B$ ist im Übrigen eine minimale Lösung für alle vier Fälle, hier allerdings die einzig mögliche.

- 1' $r \leq 0 \vdash s \leq 0$ $X_m: s \leq r$
- 2' $r \leq 0 \vdash s \not\leq 0$ $X_m: r + s \not\leq 0$
- 3' $r \not\leq 0 \vdash s \leq 0$
- 4' $r \not\leq 0 \vdash s \not\leq 0$ $X^*: r \leq s$

Ein Blick auf die zugehörigen Venn-Diagramme lehrt (Abb. 5–8a), daß die Lösungen 1', 2' und 4' Venn-minimal sind, wobei allerdings die Lösung 4' zuviel liefert: $r \cdot s \not\leq 0$, an Stelle von $s \not\leq 0$. Lösung 4' ist jedoch nicht minimal im Sinne der Definition 7.3, da $r \not\leq 0, s \not\leq 0 \vdash r \leq s$ nicht gilt.

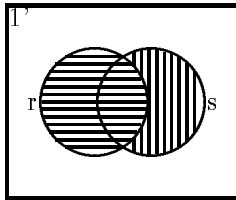


Abb. 5
 $r \leq 0, s \leq r \vdash s \leq 0$
 $= \quad \parallel$

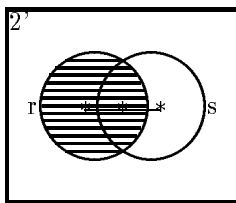


Abb. 6
 $r \leq 0, r + s \not\leq 0 \vdash s \not\leq 0$
 $= \quad * * * \quad *$ (in den Zellen $\bar{r} \cdot s$)

Die Venn-Minimalität der Lösung ersieht man daraus, daß es keine Möglichkeit gibt, zu den mit „-“ verbundenen Sternchen ein weiteres hinzuzufügen und damit $r + s \not\leq 0$ abzuschwächen, ohne damit zugleich die Beweisbarkeit der Konklusion $s \not\leq 0$ aufzugeben.

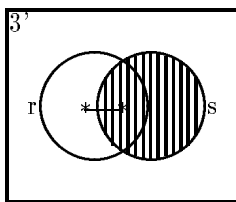


Abb. 7
 $r \not\leq 0, ? \vdash s \leq 0$
 $* \leftarrow \quad \parallel$

Triviale Sonderlösung ist hier, wie schon oben angemerkt, die Konklusion selbst, also $s \leq 0$. Diese „Lösung“ ist auch Venn-minimal. Über die Brauchbarkeit dieser „Lösung“ kann man natürlich streiten.

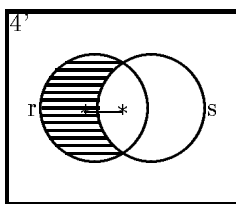


Abb. 8
 $r \not\leq 0, r \leq s \vdash s \not\leq 0$
 $* \leftarrow \quad = \quad *$
 (in den Zellen $r \cdot s$)

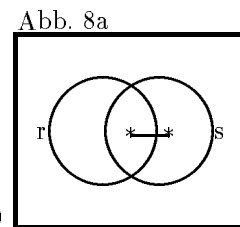


Abb. 8a
 $s \not\leq 0$

Die Minimalität der Lösungen für 1' und 2' sieht man so:

1': Zu zeigen ist $A, B \vdash X$; d.h. $r \leq 0, s \leq 0 \vdash s \leq r$. Es gilt:

$$\frac{s \leq 0 \quad 0 \leq r}{s \leq r} \text{ A6}$$

Es gilt daher $B \vdash X$; also erst recht $A, B \vdash X$.

2': Auch hier gilt bereits $B \vdash X$; d.h. $s \not\leq 0 \vdash r + s \not\leq 0$,

$$\frac{s \leq r + s \quad r + s \leq 0}{s \leq 0} \text{ A6}$$

Hieraus folgt dann mit Kontraposition: $s \not\leq 0 \vdash r + s \not\leq 0$.

Zur Lösung des Falles 1 (aa) kann man auf folgendem Wege gelangen:

$$\begin{array}{llll} a \leq b, X \vdash c \leq d & & & \\ a \cdot \bar{b} \leq 0, X \vdash c \cdot \bar{d} \leq 0 & X_m: & c \cdot \bar{d} \leq a \cdot \bar{b} & \text{nach 1' s.o.} \\ & \text{hieraus:} & c \cdot \bar{d} \leq a, c \cdot \bar{d} \leq \bar{b} & \\ \text{und dann:} & c \leq a + d, b \cdot c \leq d & & \text{nach Satz 4.3} \end{array}$$

Die Lösung des vierten Falles (oo) kann auf die des ersten (aa) zurückgeführt werden:

$$\begin{array}{l} a \not\leq b, X \vdash c \not\leq d \\ c \leq d, X \vdash a \leq b \quad \text{nach Satz 4.16} \end{array}$$

und weiter wie oben, oder aber

$$\begin{array}{llll} a \not\leq b, X \vdash c \not\leq d & & & \\ a \cdot \bar{b} \not\leq 0, X \vdash c \cdot \bar{d} \not\leq 0 & \text{Kontraposition von Satz 4.5} & & \\ X^*: & a \cdot \bar{b} \leq c \cdot \bar{d} & & \text{nach 4' s.o.} \end{array}$$

Auch der zweite Fall ao wird ähnlich behandelt:

$$\begin{array}{l} a \leq b, X \vdash c \not\leq d \\ a \cdot \bar{b} \leq 0, X \vdash c \cdot \bar{d} \not\leq 0 \quad X_m: \quad a \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{d} \not\leq 0 \quad \text{nach 2' s.o.} \end{array}$$

wobei man die Lösung 2' unmittelbar aus dem Venn-Diagramm oder aus der BL^+ -Regel (Satz) $r \leq 0, r + s \not\leq 0 \vdash s \not\leq 0$ entnehmen kann, die sich aus der Kontraposition von Axiom A10 gewinnen läßt.

7.2.2.3 Bewertung

v. Petzingers minimaler Rückschluß ist allgemeiner als der Venn-minimale Rückschluß, da er auf nahezu beliebige Kalküle bezogen ist, nicht nur auf Boolesche Verbände. Bei der Anwendung auf Boolesche Verbände, wie z.B. die Begriffslogik ergeben sich im wesentlichen die gleichen Ergebnisse, es gibt jedoch einen wichtigen Unterschied. Die Lösung im Fall 4 ist „Venn-minimal“, aber nicht „minimal“. Kontraponiert man dagegen, verwandelt den Fall 4 also in den Fall 1, so ist die Lösung von Fall 4 plötzlich doch minimal.

Der Grund ist: Die prinzipielle Funktionsmöglichkeit eines Schlusses ist z.B. in der Begriffslogik nicht gegeben, wenn man die Konklusion mit einer Prämisse tauscht (Das liegt in der Begriffslogik am Verhältnis

von allgemeinen und partikulären Urteilen), wie dieses die Minimalitätsbedingung verlangt. Einzig erlaubte Vertauschungsoperation in der Begriffslogik ist die Kontraposition, bzw. die inkonsistente Triade.

Die Minimalitätsdefinition kann aber für Kalküle, die die Kontraposition erlauben, z.B. so erweitert werden:
 $A, B \vdash_K X$ oder $\overline{B}, \overline{A} \vdash_K X$.

7.3 Die Deduktion

Eine andere Frage, die man sich im Zusammenhang mit logischen Systemen stellt, ist die Frage, was alles aus den vorgegeben Prämissen folgt. Dieser Vorgang wird im allgemeinen „Deduktion“ genannt.

Auch deduktive Fragen können mit Venn-Diagrammen behandelt werden, denn nach dem Eintrag aller bekannten Prämissen in das Diagramm steht auch alles darin, was aus den Prämissen folgt. Die Frage ist natürlich, in welcher Form und in welchem Umfang man diese Informationen ausliest. Eine vollständige Ausgabe aller in dem Diagramm enthaltenen Informationen würde einen erheblichen Umfang annehmen, außerdem wäre viel redundante Information enthalten von der Art $a \cdot b \sqsubseteq a$.

Für das Programm wurde daher eine „quasi vollständige“ Ausgabe gewählt, d.h. die Ausgabe kann relativ einfach (durch einfachste verbandstheoretische Regeln) vervollständigt werden, wenn man sich die Zeit dazu nehmen will. Um diese „quasi vollständige“ Ausgabe zu erreichen, werden die Zellen, die durch allgemeine Prämissen gestrichen wurden, in einer Menge zusammengenommen und dann soweit wie möglich zusammengefaßt (Generierung der Primimplikanten). Ebenso werden die nicht gestrichenen Zellen jeder einzelnen partikulären Prämisse zusammengefaßt.

Der bekannteste Zusammenfassungsalgorithmus zur Erzeugung von Primimplikanten ist der Algorithmus von Quine/McCluskey. Er basiert auf der Regel $a \sqcap b \sqsubseteq 0, a \sqcap \overline{b} \sqsubseteq 0 \vdash a \sqsubseteq 0$, einer einfachen Anwendung von (A5).

Das Venn-Diagramm liefert die Minterme als Zellennummern, mit denen der Algorithmus startet. Jedoch reicht ein Bit nun nicht mehr zur Kodierung der Verhältnisse eines Grundobjekts aus, denn man muß neben dem negierten wie dem unnegierten Auftreten auch noch kodieren können, daß das Grundobjekt sowohl negiert als auch unnegiert auftritt, und daher gemäß obiger Regel eliminiert werden kann.

Eine mögliche Lösung ist die Kodierung in zwei Zahlen: Zu Beginn sind beide Zahlen gleich und entsprechen der Zellennummer. Nach Elimination eines Grundobjekts steht in der ersten Zahl eine 0 und in der zweiten eine 1. Diese Elimination kann erfolgen, wenn sich die beiden ersten Zahlen der zu vergleichenden Implikanten nur an einer Stelle unterscheiden und ebenso die beiden zweiten Zahlen nur an dieser Stelle. Lassen sich Implikanten bei einem Durchlauf (jeder Implikant, der sich möglicherweise an nur einer Stelle von einem anderen Implikanten unterscheidet, wird mit diesem verglichen) nicht für eine Elimination verwenden, dann sind sie prim und brauchen nicht mehr weiter betrachtet zu werden.

Als Ausgabe erhält man die Menge der Primimplikanten in der Kodierung durch je zwei Zahlen, die sehr einfach als Halbordnungen oder negierte Halbordnungen interpretiert werden können.

Es gibt Implementationen des Quine/McCluskey Algorithmus, die eine Laufzeit von $O(N^{\log(3)} \cdot \log^2(N))$ erreichen, mit N Länge der Eingabe. Das liegt an einer besonders effizienten Speicherung der Implikanten, z.B. in einem 2-3 Baum auf einem 3-wertigen Alphabet. Die vorgestellte Version verwaltet die Implikanten in linearen Listen, ist also nicht ganz so gut.

Hat man viele Implikanten und lassen sich die Prämissen sehr gut zusammenfassen, so ergeben sich aber doch recht lange Laufzeiten für den Quine/McCluskey Algorithmus.

Daher ist noch ein anderer Algorithmus denkbar, der das Zusammenfassen von der anderen Seite her angeht, d.h. er beginnt bei der Prüfung der stärksten Zusammenfassungen und arbeitet sich von dort nach unten vor.

Dabei gibt die Zahl der zusammenzufassenden Zellen bereits eine Schranke an, ab der es sich erst zu testen lohnt, ob die jeweils notwendigen Minterme vorhanden sind. Ist die Schranke erreicht, werden die auf dieser Ebene generierten möglichen Zusammenfassungen getestet, und mit Breitensuche weitergeneriert. Für jede so erzeugte mögliche Zusammenfassung wird überprüft, ob alle für sie notwendigen Minterme vorhanden sind. Wenn ja, wird diese Zusammenfassung ausgegeben. Danach terminiert dieser Ast des Baumes der möglichen Zusammenfassungen, denn er würde immer nur Spezialfälle der bereits gefundenen Zusammenfassung ausgeben. Hier wirkt sich die Wahl der „quasi-vollständigen“ Ausgabe aus.

Insgesamt bildet die größte Zahl der in einer Prämisse vorkommenden Grundobjekte eine Schranke für den Grad der zu erzeugenden Zusammenfassungen. Der Algorithmus terminiert daher spätestens auf der Ebene der Minterme, meistens aber schon viel früher. Dabei könnte der Algorithmus im schlimmsten Fall $2^{(2^n)}$ mögliche Zusammenfassungen generieren, nämlich wenn die Eingabe nur aus einem einzigen Minterm besteht und das wäre sehr schlecht.

Der eine Algorithmus ist da gut, wo der andere schlecht ist und umgekehrt. Als statistisch begründete Heuristik hat sich ergeben, den zweiten Algorithmus im Rahmen der Deduktion einzusetzen, sobald mehr als ein Drittel der Zellen des Diagrammes zusammengefaßt werden sollen.

7.4 Beweise

Es ist möglich, sich den Beweisweg für eine beliebige Konklusion, die folgt, aus den Informationen zu suchen, die ein Venn-Diagramm liefert. Das erscheint auf den ersten Blick unwahrscheinlich, wo doch explizit in Venn-Diagrammen gar keine Regeln angewendet werden. Das war ja gerade der große Vorteil der Diagramme. Die Regeln der Booleschen Verbände stecken jedoch implizit in der Konstruktion der Diagramme und daher ist es, wenn eine Konklusion folgt, möglich, Beweise zu konstruieren. Der Beweis von Satz 3.3 zeigte, daß das immer geht. In der Tat sind die Beweise, die man so erzielen kann, nicht immer gerade sehr schön und Kleinigkeiten werden gelegentlich zu kompliziert bewiesen, aber dafür ist diese Beweismethode sehr schön algorithmisch.

Die Beweismethode ist bereits einmal beschrieben worden, und zwar, wie schon erwähnt, im Beweis von Satz 3.3. Wir werden die Beschreibung aber trotzdem noch einmal kurz wiederholen:

7.4.1 Halbordnungen

Halbordnungen (allgemeine Konklusionen) werden wie folgt bewiesen:

Es werden die Prämissen bestimmt, die Zellen streichen, welche die Konklusion betreffen. Diese Prämissen werden dann jeweils auf die Zellen spezialisiert, die Zellen der Konklusion sind. Dann werden die Zellen zusammengefaßt. Die dabei verwendeten Regeln sind die folgenden:

1. $a \sqcup b \sqsubseteq c \dashv\vdash a \sqsubseteq c, b \sqsubseteq c$ (Satz 2.10)
2. $a \sqsubseteq b \sqcap c \dashv\vdash a \sqsubseteq b, a \sqsubseteq c$ (Satz 2.10)
3. $a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq c \dashv\vdash a \sqsubseteq b \sqcup c$ (Satz 2.26, Transportationsregel von Peirce)
 $a \sqcap b \sqsubseteq c \dashv\vdash a \sqsubseteq \bar{b} \sqcup c$ (Satz 2.26, Transportationsregel von Peirce)
4. $a \sqsubseteq 0 \vdash a \sqcap b \sqsubseteq 0$ (Einfache Transitivitätsanwendung)
5. $a \sqcap b \sqsubseteq 0, a \sqcap \bar{b} \sqsubseteq 0 \vdash a \sqsubseteq 0$ (Quine/McCluskey)
6. $a \sqcup b = b \sqcup a$ (V2a)
 $a \sqcap b = b \sqcap a$ (V2b)

Gegeben seien also beliebige Halbordnungen von Funktionen Boolescher Verbände.

Zunächst werden alle zum Beweis benötigten Prämissen in die Form $a \sqsubseteq b$ gebracht, dabei stehen auf der linken Seite nur Konjunktionen und auf der rechten nur Disjunktionen. Dieses geschieht mit den Regeln 1. und 2. durch Aufspaltung der Prämissen. Unter Umständen sind aber auch noch die DeMorgan Regeln und

die Distributivgesetze notwendig. Dieser Schritt kann nahezu beliebig komplex sein (er kommt quasi einer Umwandlung in die disjunktive Normalform gleich nach Satz 2.29). Aus den Diagrammen ist dieser Schritt nicht ablesbar, weil er konstruktiv eliminiert ist. Daher ist der vom Venn-Programm gelieferte Beweis an dieser Stelle sehr kurz. Aber auch dieser Schritt ist algorithmisch, wie Satz 2.29 erkennen ließ.

Die so umgeformten Prämissen werden dann mit Hilfe der Transportationsregel von Peirce (3.) in Halbordnungen der Form $a \sqsubseteq 0$, d.h. in sog. 0-Subsumtionen verwandelt.

Mit Regel 4. werden die Prämissen soweit wie nötig spezialisiert. Soweit wie nötig heißt hier, daß bis auf die Ebene aller in der Konklusion und in den benötigten Prämissen enthaltenen Objekte spezialisiert wird, im Extremfall also bis auf die Ebene der Minterme.

Die auf die Zellen der Konklusion reduzierten Prämissen werden dann mit Hilfe von Regel 5. (Quine/McCluskey) zusammengefaßt.

Die so erzeugte Konklusion muß nun noch eventuell mit Hilfe der Regeln 1., 2. und 3. und evtl. noch DeMorgan und Distributivgesetze in die gewünschte Form gebracht werden. Auch dieser Schritt kann wieder extrem gekürzt sein.

Hier nicht extra aufgeführt sind kommutative Vertauschungen, die gelegentlich notwendig sind.

Der zugehörige Algorithmus ist sehr umfangreich, denn es wird in der Abfolge der obigen Regelanwendungen ein sehr komplexes Geflecht von Rück- und Querbezügen zwischen Listenelementen aufgebaut, die auf die Prämissen einer Konklusion verweisen, solange bis man bei den wirklichen Prämissen angelangt ist. Dann läuft noch einmal ein Kürzungsalgorithmus über das Geflecht von Regelanwendungen, um unnötige Teile des Geflechts zu eliminieren.

Allgemeine Konklusionen können auch auf Streichungen beruhen, die durch Individualbegriffsdeklarationen hervorgerufen werden. Dann gehört noch mindestens eine partikuläre Prämisse mit zum Beweis. Diese partikuläre(n) Prämisse(n) wird (werden) im Beweis mit angegeben, sowie die allgemeinen Prämissen, die, falls vorhanden, dazu führen, daß die obige(n) partikuläre(n) Prämisse(n) zum Beweis gehören. Diese Streichungen können natürlich wiederum auf Individualbegriffsdeklarationen beruhen. Die Individualbegriffsdeklaration bringt eine Komplikation in die Beweismechanik, denn Schraffierungen von Zellen durch Individualbegriffsdeklarationen können wiederum auf Individualbegriffsdeklarationen beruhen, usw. Dieses Problem wird durch einen rekursiven Aufruf der Beweisroutinen gelöst, bis keine Individualbegriffsdeklaration mehr als Prämisse auftaucht.

7.4.2 Negierte Halbordnungen

Negierte Halbordnungen (partikuläre Konklusionen) werden etwas anders als die allgemeinen Konklusionen bewiesen:

Es werden der Reihe nach die Sternsorten bestimmt, mit denen die Konklusion FOLGT. Dann werden die Sterne der jeweiligen Sternsorte bestimmt, die gestrichen sein müssen (möglicherweise muß keiner gestrichen sein). Die partikuläre Prämisse wird in ihre kleinsten Teile spezialisiert. Dann werden die gestrichenen Sterne entfernt und die übrigbleibenden Sterne zur Konklusion zusammengefaßt.

Es werden zusätzlich die folgenden Regeln benötigt:

$$7. a \sqcap \bar{b} \not\sqsubseteq c \dashv\vdash a \not\sqsubseteq b \sqcup c \text{ (Kontraposition von Satz 2.26)}$$

$$a \sqcap b \not\sqsubseteq c \dashv\vdash a \not\sqsubseteq \bar{b} \sqcup c \text{ (Kontraposition von Satz 2.26)}$$

$$8. a \not\sqsubseteq 0 \vdash (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap \bar{b}) \not\sqsubseteq 0 \text{ (Einfache kontraponierte Anwendung von (A5))}$$

$$9. a \sqcup b \not\sqsubseteq 0, a \sqsubseteq 0 \vdash b \not\sqsubseteq 0 \text{ (Satz 2.32)}$$

$$10. a \sqcap b \not\sqsubseteq 0 \vdash a \not\sqsubseteq 0 \text{ (Kontraposition von 4.)}$$

Zunächst wird die benötigte partikuläre Prämisse und (falls erforderlich) die benötigten allgemeinen Prämissen aufgelistet. Die partikuläre Prämisse wird mit Hilfe von Regel 7. in eine negierte 0-Subsumtionen verwandelt und dann mit Regel 8. bis auf Mintermstufe aufgespalten. Die allgemeinen Prämissen werden behandelt wie im Fall einer allgemeinen Konklusion. Dann werden mit Hilfe von Regel 9. die außerhalb der Konklusion liegenden gestrichenen Sterne der partikulären Prämisse entfernt. Die so entstandene negierte 0-Subsumtion wird sodann mit Regel 10. soweit wie nötig verallgemeinert und mit Regel 7. in die gewünschte Form gebracht.

Auch dieser Algorithmus ist wieder sehr kompliziert, enthält er doch zum Teil den Algorithmus für allgemeine Prämissen. Ansonsten funktioniert er aber ganz ähnlich, indem wieder entsprechend den anzuwendenden Regeln ein Geflecht von Rück- und Querbezügen aufgebaut und anschließend durchgekürzt wird.

Eine geeignete partikuläre Prämisse kann auch durch die Deklaration eines Individualbegriffes entstanden sein, in diesem Fall wird die entsprechende Deklaration als Prämisse angegeben.

7.4.3 Bemerkungen

Ein zuvor durchgeführter Konklusionentest, bei dem bereits wichtige Informationen gesammelt werden, zeigt, ob ein Beweis überhaupt möglich ist. Ist der Konklusionentest positiv, so folgt die Konklusion und dieses Wissen macht sich der Algorithmus zunutze. Er hat sozusagen eine Erfolgsgarantie. Das unterscheidet ihn von vielen anderen Beweisalgorithmen, die unter Umständen in die Irre laufen, weil sie etwas beweisen wollen, was nicht beweisbar ist.

Die Auffindung dieser Beweismechanik wurde durch die Verwendung des Halbordnungskalküls, gegenüber dem Booleschen Gleichungskalkül, begünstigt. Warum ?

Der Gleichungskalkül enthält im Prinzip nur eine Regel, nämlich die unglaublich starke Substitutionsregel. Diese Regel ist heuristisch sehr anspruchsvoll, sie verlangt in jedem Schritt eine „Idee“, was gleichzusetzen oder einzusetzen ist. Hier eine Beweismechanik zu finden, ist ziemlich schwierig, wenn nicht unmöglich, denn jeder Beweis ist anders. Der Halbordnungskalkül enthält dagegen eine ganze Reihe einfacher Regeln, von denen nur eine einzige etwas unangenehm ist, nämlich die Transitivitätsregel (A6). Bei der Rückwärtsentwicklung eines Beweises, d.h. der Konstruktion des Beweises von der Konklusion zu den Prämissen, ist man gezwungen einen „Mittelterm“ neu einzuführen, ebenfalls ein heuristisch sehr anspruchsvoller Akt.

Dieses Problem wird im vorliegenden Beweisalgorithmus umgangen, da die Transitivitätsregel nicht direkt zur Anwendung kommt. Statt dessen werden Sätze verwendet, die zwar mit Hilfe der Transitivitätsregel bewiesen wurden, aber nicht deren heuristisches Problem haben.

Der üblicherweise verwendete Gleichungskalkül zur Darstellung Boolescher Verbände verhindert gewissermaßen die Auffindung eines einfachen Beweisalgorithmus. Auch mit dem nackten Halbordnungskalkül ist es noch schwierig. Die „bildliche“ Darstellung des Halbordnungskalküls, sowie des Verhältnisses Prämissen - Konklusion im Venn-Diagramm macht das Erkennen der Zusammenhänge dagegen relativ einfach.

Die durch das Programm gelieferten Beweise beruhen quasi auf einem gegenüber dem Kalkül $BV^{\leq, \geq}$ veränderten Axiomensatz. Diese Kalküle sind jedoch äquivalent, denn die Kalküle des einen lassen sich in dem anderen beweisen.

Eine Richtung ist bereits erledigt durch die oben angegebenen Satznummern zu den verwendeten Regeln. Weiterhin sind die Axiome A7 und A8 durch die Übersetzung erledigt, die Gültigkeit der Axiome A6, A9 und A10 macht man sich leicht am Venn-Diagramm klar. Ebenso kann man sehr leicht die Gültigkeit von -A6- bis -A10- klären.

7.4.4 Individualbegriffe

Eine Individualbegriffsdeklaration als Konklusion wird behandelt, indem die Totalidentität mit einem bestehenden Individualbegriff nachgewiesen wird. Die Vorgehensweise entspricht also der bei allgemeinen Prämissen.

7.4.5 Aussagenlogik

Für die Aussagenlogik wird zusätzlich noch bei Bedarf das Urteilsprinzip angewendet. Das geschieht bevor die Prämissen in das Diagramm eingetragen werden und geschieht auch wieder beim Auslesen. Partikuläre Prämissen und Konklusionen, sowie Individualbegriffsdeklarationen sind in der Aussagenlogik weder sinnvoll noch möglich und können somit auch nicht behandelt bzw. bewiesen werden.

7.4.6 Grundformeln

Grundformeln („tautologische“ Urteile), wie z.B. $a \leq a$ sind mit Venn-Diagrammen nicht beweisbar, da sie in ihnen zwar eingetragen werden können, aber keinerlei sichtbare Auswirkungen zeigen. Sie sind bereits alle implizit in der Konstruktion der Venn-Diagramme enthalten. Das Programm kann nichts beweisen, da diese Konklusionen nichts streichen. Sie benötigen ja auch keine Prämissen, um zu folgen.

7.5 Widersprüche

Ein Prämissensystem ist widersprüchlich, wenn es eine Sternsorte gibt, deren Sterne vollständig schraffiert sind, denn dann gilt $a \not\leq 0$ aber auch $a \leq 0$. Das ist das Schlimmste, was passieren kann und eine weitere Diskussion über das Prämissensystem ist ziemlich sinnlos.

In der Aussagenlogik tritt dieser Fall ein, sobald jede Zelle schraffiert ist, denn im Hintergrund der Aussagenlogik steht die Zweiwertigkeit, d.h. $1 \not\leq 0$. Die vollständige Schraffur des gesamten Diagrammes ist aber nichts anderes als $1 \leq 0$.

Begriffslogisch interessant sind auch solche Beziehungen wie $1 \leq a$ oder $a \leq 0$, denn sie zeigen an, daß ein Begriff der inhaltsleerste bzw. widersprüchlich geworden ist.

7.6 Bestimmung überflüssiger Voraussetzungen

Da jede Prämisse einzeln in die Felder der Datenstruktur, die das Venn-Diagramm repräsentiert, eingetragen wird, ist es sehr einfach möglich, zu prüfen, ob in bezug auf das gesamte Prämissensystem Prämissen redundant vorhanden sind.

Bei den Prämissen $a \sqcap b \sqsubseteq 0$ und $a \sqsubseteq 0$ ist z.B. $a \sqcap b \sqsubseteq 0$ völlig überflüssig. In ähnlicher Weise können auch partikuläre Prämissen behandelt werden.

In einem rekursiven Prozeß werden Enthaltenseinsbeziehungen der Prämissen untereinander geprüft.

Literaturverzeichnis

- [1] HERMES, HANS: *Einführung in die Verbandstheorie*. Springer Verlag, Berlin, 1955. 2. Auflage 1967.
- [2] PRACHT, EGON: *Algebra der Verbände*. Verlag Ferdinand Schöningh, Paderborn, 1980.
- [3] GRÜNBAUM, BRANKO: *Venn Diagrams and Independent Families of Sets*. Mathematics Magazine, 48:12–23, 1975.
- [4] FREYTAG LÖRINGHOFF, BRUNO BARON VON: *Logik I. Das System der reinen Logik und ihr Verhältnis zur Logistik*. Verlag Kohlhammer, Stuttgart, 5. Auflage, 1972.
- [5] FREYTAG LÖRINGHOFF, BRUNO BARON VON: *Logik II. Definitionstheorie und Methodologie des Kalkülwechsels*. Verlag Kohlhammer, Stuttgart, 1967.
- [6] FREYTAG LÖRINGHOFF, BRUNO BARON VON: *Neues System der Logik. Symbolisch-symmetrische Rekonstruktion und operative Anwendung des aristotelischen Ansatzes*. Verlag Felix Meiner, Hamburg, 1985.
- [7] FREYTAG LÖRINGHOFF, BRUNO BARON VON: *Zur Gegenwart und Zukunft der „Tübinger Logik“*. Attempto Verlag, Tübingen, 1990. (Mit Diskette).
- [8] PETZINGER, JOHANN-MICHAEL VON: *Das Verhältnis von Begriffs- und Urteilslogik. Eine Untersuchung verschiedener Logikkalküle mit einem Exkurs über die Antinomien und den Intuitionismus*. Dissertation, Universität Tübingen, 1975.
- [9] PETZINGER, JOHANN-MICHAEL VON: *Zum Rückschluß auf verborgene Prämissen*. unveröffentlicht, 1978.
- [10] PETZINGER, JOHANN-MICHAEL VON: *Begriffslogik*. unveröffentlicht, 1985.
- [11] VENN, JOHN: *On the forms of logical proposition*. Mind, 5:336–349, 1880.
- [12] VENN, JOHN: *On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions*. In: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Band 4, Seiten 47–59, 1880.

- [13] VENN, JOHN: *On the diagrammatic and mechanical representations of propositions and reasoning*. Philosophical Magazine, 10(series 5):1–18, 1880.
- [14] VENN, JOHN: *Symbolic Logic*. Macmillan, London, 1. Auflage, 1881.
- [15] VENN, JOHN: *Symbolic Logic*. Macmillan, London, 2. Auflage, 1894. Nachdruck von Burt Franklin, New York, 1971.
- [16] LEWIS, C.I.: *A Survey of Symbolic Logic*. University of California Press, Berkely, 1918.
- [17] GARDNER, MARTIN: *Logic machines and diagrams*. The Harvester Press, London, 1958.
- [18] LUKASIEWICZ, J. und A. TARSKI: *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*. C. R. Soc. Sci. Varsovie 23, Kl. III, Warschau, 1930.
- [19] HILBERT, D. und W. ACKERMANN: *Grundzüge der theoretischen Logik*. Springer Verlag, Berlin, 1928. 6. Auflage 1972.
- [20] LORENZEN, PAUL: *Formale Logik*. de Gruyter, Berlin, 4. Auflage, 1970.
- [21] MENNE, ALBERT: *Einführung in die Logik*. A. Franke Verlag, 1966. 2. überarbeitete Auflage 1973.
- [22] MEHRTENS, HERBERT: *Die Entstehung der Verbandstheorie*. Verlag Gerstenberg, Hildesheim, 1979.